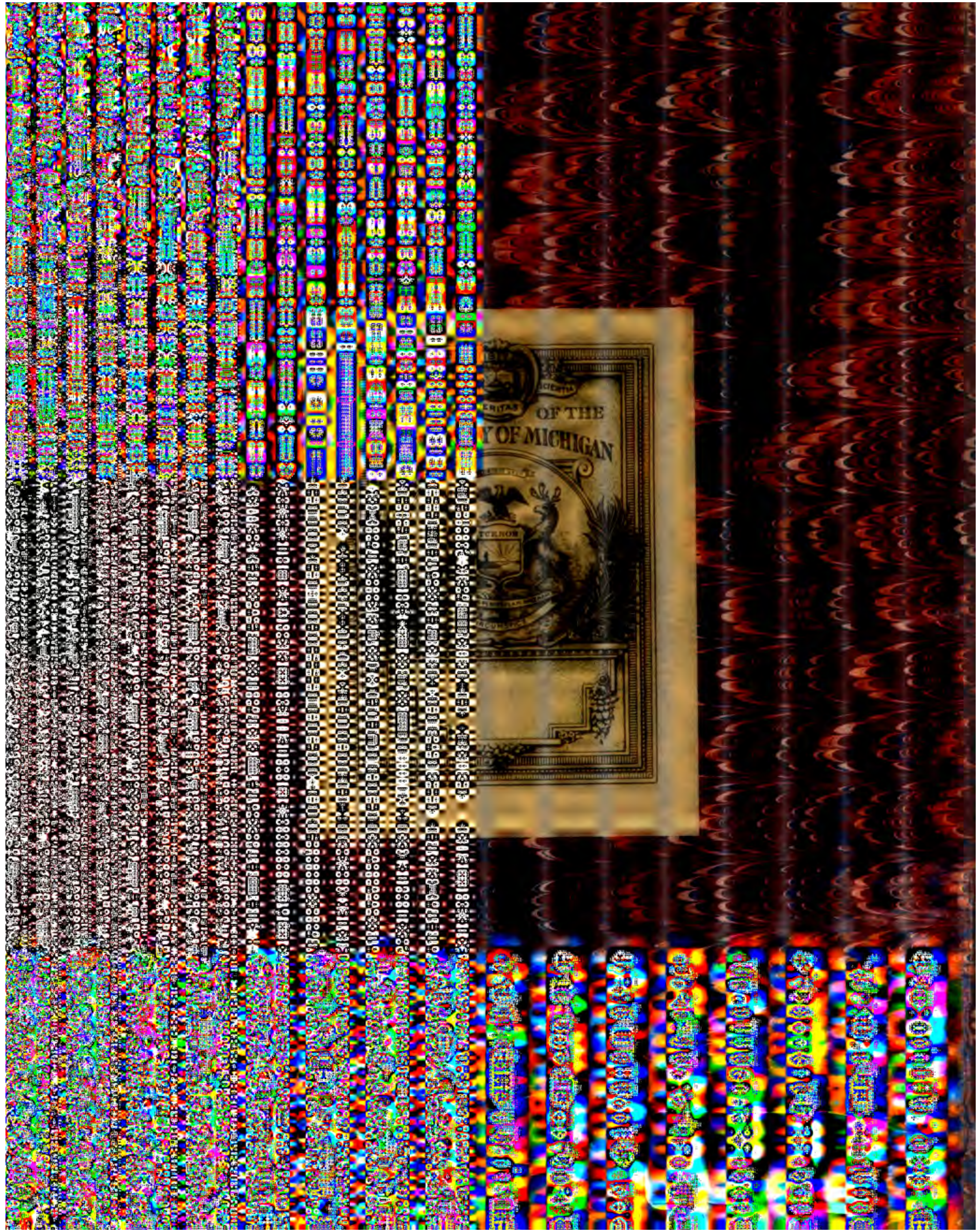
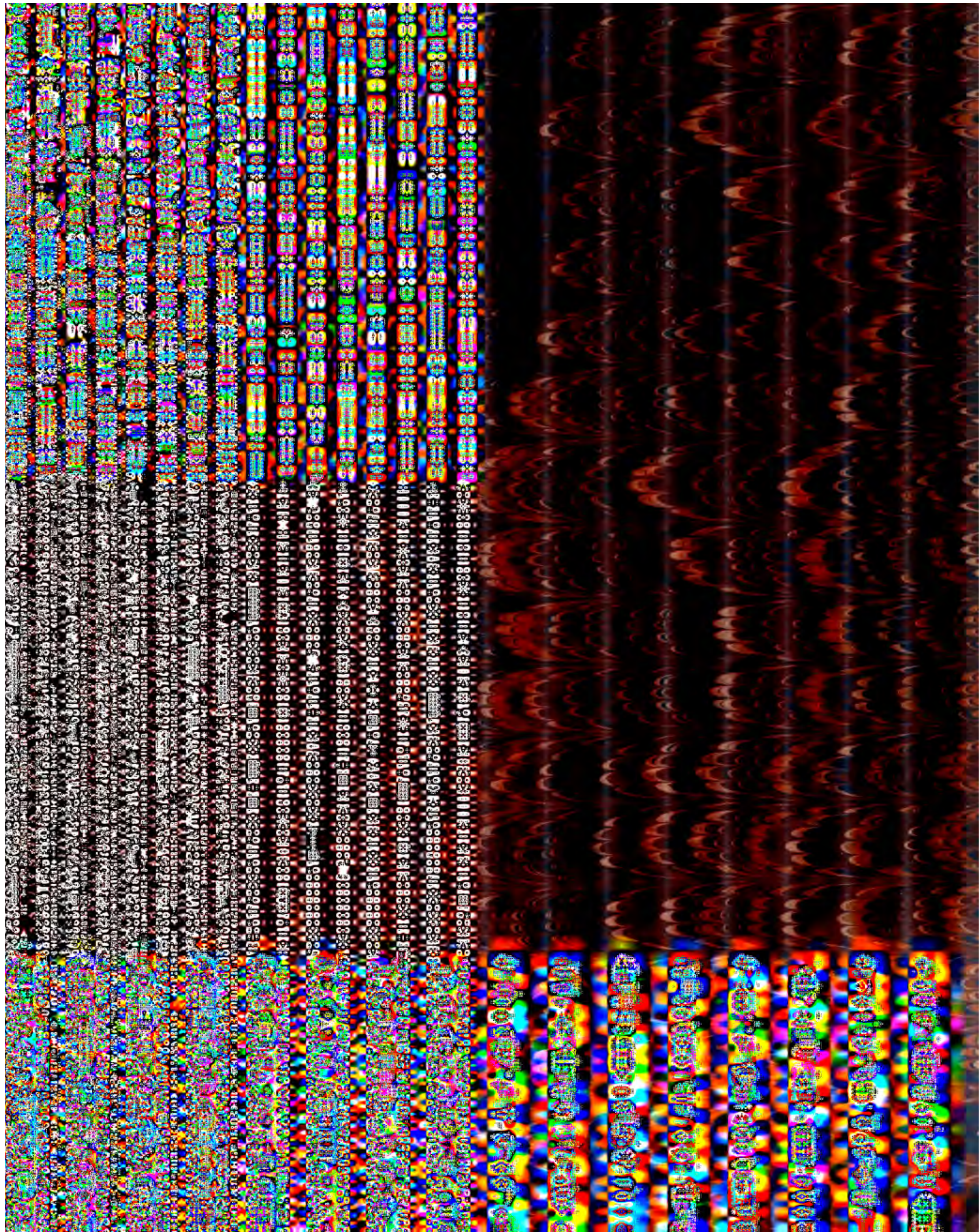

OF THE
OF MICHIGAN



ANTONII MARII LORGNA

DE

CASU IRREDUCTIBILI

TERTII GRADUS

ET

SERIEBUS INFINITIS

EXERCITATIO ANALYTICA

. . . . Juvat integros accedere fontes
Atque haurire: juvatque novos decerpere flores.

Lucrez. Lib. 4.

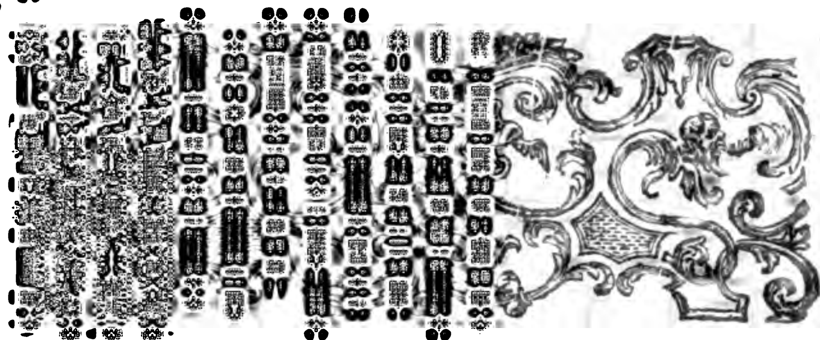
VERONÆ MDCCLXXVI.

TYPIS MARCI MORONI

Superiorum Permissu.


Ex
Biblioth. Regia
Berolinensi.





[illegible] M I U M.

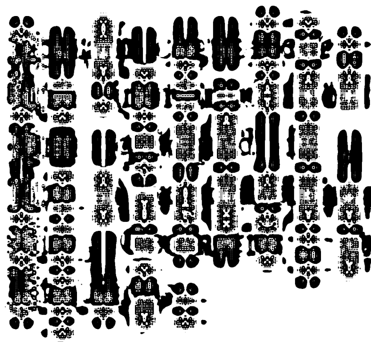
[illegible] quationum Cubicarum [illegible] vulgo *Cardanica* nun- [illegible] alium imaginariis im- [illegible]

cents ans (*Alembert* Enciclop. Cas irreductible) . Hujusmodi veluti quædam in ipso Scientiæ limine lacuna omnes, quotcunque Algebram coluere, jam inde a *Cardani* temporibus sollicitos habuit. Et primo, qua id de causa fieret, inquirere diligentius cæperunt. In quo quidem diversi diversa afferunt, nec in unum omnes, circa mysterii enodationem, Mathematici conveniunt. Id tamen confectum, ratumque passim videtur, obscuram potius formam Cardanicam dicendam esse, quam fallacem, eamque reale quidpiam exprimere, etiamsi imaginariis signis involvatur. Cum enim Æquationis radix reapse sit realis, atque ejus sit Cardanica Radicis expressio formæ, quæ evoluta rectificari, imaginariisque exui posse videatur, cur existimandum haud erit eandem revera finitum aliquod reale significare, imaginariis, virtualiter saltem, contrarietate signorum elisis? Nihil aliqui præter hujusmodi suspicionem in medium adduxere. Alii vero longius progressi, ejus rei demonstrationes, non easdem tamen omnes, condere & proferre conati sunt. Profecto vix quemquam a *Cardano* fuisse, facile credam, qui cum in hujusmodi Studiorum genere aliquanto processerit, tam parum sibi confidendum existimarit, ut vires quodammodo novas in re nondum desperata, se irrito conatu exerciturum, arbitratus

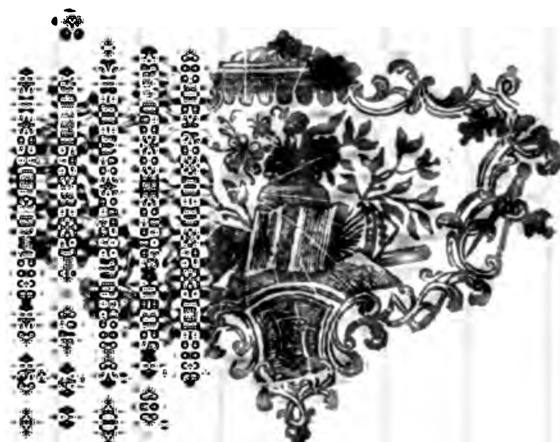
sit.

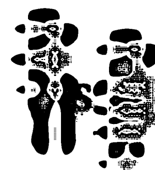
sit. Id mihi quoque accidisse, meditatio hæc ipsa monet qualiscunque. Occasione enim disquisitionis cujusdam perillustri Instituto Scient. Bononiensi deferendæ, circa Æquationes tertii gradus versanti in animum venit, ut, alendæ industriæ gratia, Casum quoque irreductibilem aggrederer, mihi saltem, sin publico, difficultate penitius introspecta, satisfacturus. Cum vero recordarer tot summos tum præteriti cum ævi nostri Mathematicos, irresolutum id omnes reliquisse, propius nihil est factum, quam ut a suscepto consilio revocarer. Res tamen sæpe rem trudit, difficultate ipsa aliquando stimulos admovente. Quo quidem factum, ut, quæstione undequaque adorta, eadem ipsa via, qua ad reductionem, si haberi posset, Formulæ Cardanicæ ad formam finitam imaginariis immunem intendebam, eo paulatim devenerim, ut, Binomium Cardanicum valoris profecto esse necessario realis, formæ autem necessario imaginariæ, demonstrarem, intima Serierum Theoria facem quodammodo præferente. Oblata proinde necessitate, potius quam occasione, gravissimas difficultates enucleandi, quæ in Seriebus præsertim divergentibus occurrunt, in eo totus fui, ut ipsam Serierum infinitarum genesim penitius scrutarer, evolveremque; In quo fortasse haud omnem mihi perditam fuisse

ope-



qui hiſce perlegendis paullu-
inutile exiſtimabunt. Cæte-
quod Exercitatione hac no-
præſtare pro viribus datum
par eſt, dijudicandum re-









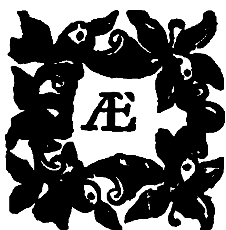




SECTIO I.

DEFINITIO

§. I.



Quatio (A) tertii gradus

$x^3 - px + q = 0$ - - - - - - - - (A)

secundo termino destituta, quæ positis p, q quantitatibus rationalibus, nullo cujuscunque formæ divisore ad inferiorem gradum deprimi potest, Cubica Æquatio nuncupatur.

COROLL.

§. II.

Æquatio ideo tertii gradus in genere, quæ cujusvis formæ Divisore ad inferiorem gradum deprimi potest, etiamsi radicibus sit prædita realibus, inæqualibus, atque incommensurabilibus, Æquatio Cubica proprie dici nequit.

PROP.

PROP. I.

§. III.

Radices Cubicæ Æquationis (A)

$x^3 - px - q = 0 \ldots\ldots\ldots (A)$

ad methodum *Cardani* definire.

RESOLUTIO.

Fiat $x = y + \frac{p}{3y}$. Erit $x^3 = y^3 + py + \frac{p^2}{3y} + \frac{p^3}{27y^3}$, ideoque facta in (A) valorum x in y substitutione, prodibit $y^6 - qy + \frac{p^3}{27} = 0 \ldots\ldots (B)$

Resoluta Æquatione (B), habetur

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

Hinc $x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + p :$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

Quare, secundi termini Binomii numeratore, & denominatore in $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$ ductis, exurget Radicis Æquationis (A) Cardanica expressio, quam omnium primus invenit *Scipio Ferri*,

$x =$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \ldots\ldots (C)$$ Q. E. I.

SCHOLION.

§. IV.

Quotiescunque in Cubica Æquatione (A), collatis inter se invicem valoribus p, q, est $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{4}$, neminem latet, Æquationem radicibus tum inæqualibus cum realibus præditam esse; quod dudum demonstratum est. Verum in Æquatione (C) §. III. quotiescunque est $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{4}$, valorem x in p & q imaginariis implicari, manifestum est. Qua de causa fiat, quove methodi, si quod inest, vitio, ut quod reapse reale esse debet, sub forma appareat imaginaria, diligentius primo investigemus.

PROP. II.

§. V.

In Æquatione tertii gradus secundo termino destituta, cujus omnes Radices sint reales, atque inæquales, Triens quadrupli coefficientis tertii ter-

mini positive sumti majus est quadrato cujuslibet radicis Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Sint Æquationis radices a, $-b$, $-c$; vel $-a$, b, c; & quoniam deficit terminus secundus, erit $a = b + c$, atque Æquatio hujus erit formæ $x^3 - (b^2 + bc + c^2)x \pm bc(b + c) = o$; dico, quantitatem $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3}$ majorem esse quadrato cujuslibet radicis b^2, vel c^2, vel $b^2 + 2bc + c^2$. Etenim, quod ad quadrata b^2 vel c^2 attinet, res est per se manifesta. Quod vero ad alterius radicis quadratum, cum summa quadratorum duarum quantitatum major sit duplo earundem producto, erit $b^2 + c^2 > 2bc$. Quare $b^2 + 4bc + c^2 > 6bc$; ideoque $4b^2 + 4bc + 4c^2 > 3b^2 + 6bc + 3c^2$. Ergo $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3} > b^2 + 2bc + c^2$, quadrato scilicet radicis $\mp b \mp c$. Q. E. D.

PROP. III.

§. VI.

In Æquatione tertii gradus secundo termino destituta, cujus omnes radices sint reales, atque insuper duæ inter se æquentur, Triens quadrupli coef-

coefficientis tertii termini positive sumti æquale est quadrato radicis maximæ Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Positis, quæ in præced. Prop., fiat $c = b$. Erit radix maxima $= \pm 2b$; utraque vero æqualium radicum $= \mp b$, atque ideo $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3} = 4b^2$, quadrato scilicet radicis maximæ $\pm 2b$. Q. E. D.

PROP. IV.

§. VII.

In Æquatione tertii gradus secundo termino destituta, cujus binæ radices sint impossibiles, existente tertio termino negativo, Triens quadrupli coefficientis ejusdem termini tertii positive sumti, minus est quadrato radicis realis Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Esto hujusmodi Æquatio $x^3 + (a^2 - 3b^2)x - 2a^2b - 2b^3 = o$ cujus binæ radices sunt imaginariæ, realis vero radix $x = 2b$. Et quoniam tertius terminus negativo signo affici debet, erit $3b^2 > a^2$. Quare Triens quadrupli coefficientis termini tertii positive sumti erit $\frac{12b^2 - 4a^2}{3}$. Jam vero $\frac{12b^2 - 4a^2}{3}$

b 2 minus

PROP. VI.

§. XII.

Positis binis æquationibus

$$x^3 - px - q = o \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$x - y - \frac{p}{3y} = o \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

I. Si æquationis (A) fuerint radices omnes tum reales, cum inæquales, atque in æquatione (B) loco x substituatur radix quælibet æquationis (A), evadit y imaginaria.

II. Si autem in æquatione (A), cujus sunt radices reales, fuerint binæ inter se æquales, & in æquatione (B) loco x ponatur radix maxima æquationis (A), valores y erunt reales.

III. Pari modo si in æquatione (A) fuerint binæ radices imaginariæ, & realis radix ejusdem æquationis substituatur loco x in æquatione (B), valores y erunt itidem reales.

DEMONSTRATIO.

Nam, quod ad I. Prop. partem, quælibet radix x æquationis (A) minor est quam $2\sqrt{p:3}$ (§. VIII.). Valores autem speciei y in æquatione (B) sunt impossibiles, quotiescunque est x minor quam $2\sqrt{p:3}$ (§. IX.). Ergo &c.

Quod

Quod vero ad II. & III., radix maxima x æquationis (A), in qua ſunt radices omnes reales, atque binæ inter ſe æquales, æquatur $2\sqrt{p:3}$ (§. IX.); vel exiſtentibus in eadem æquatione binis radicibus imaginariis, radix realis major eſt quam $2\sqrt{p:3}$ (§. X.). Valores autem y ſunt in æquatione (B) reales, ſi fuerit x æqualis $2\sqrt{p:3}$, vel eodem majus (§. XII.). Ergo &c. Q.E.D.

SCHOLION.

§. XIV.

Quod ſi fuerit æquatio $x^3 + px \mp q = o$, cujus binæ radices ſunt impoſſibiles, atque ſumatur $x = y - p:3y$, poſita in hac æquatione, loco x, radice reali æquationis tertii gradus, valores y erunt reales. Reſoluta enim, ut ante, æquatione $x = y - p:3y$, fit $y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{p}{3}\right)}$, in qua, exiſtente p quantitate affirmativa, ex hypotheſi, ſpecies y nuſquam imaginaria evadere poteſt.

CO-

COROLL.

§. XV.

Colligitur hinc manifesto Binomium Cardanicum
$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$
necessario imaginariis valoribus implicari, quotiescunque æquatio resolvenda radicibus sit prædita tum realibus cum inæqualibus. Nam eo prorsus redit Cardani regula, ut proposita æquatione (A) (§. XIII.)

$$x^3 - px - q = o \ldots\ldots (A)$$
$$x - y - p : 3y = o \ldots\ldots (B)$$

fingatur æquatio (B), quo valores y, & proinde ipsius x in p & q commode eruantur. Quod perinde est ac si radices æquationis (A), loco x, substituerentur in æquatione (B. Radicibus vero æquationis (A) positis tum realibus cum inæqualibus, si una quælibet earum loco x substituatur in æquatione (B), fit y imaginaria (§. XIII). Ergo & qui ex Cardanica substitutione prodeunt valores in p & q ipsius y erunt imaginarii. Si igitur in æquatione (B) ejusmodi ponantur valores y, valorem itidem in p, & q ipsius x imaginariis implicari, necesse est. Quo quidem perspicue licet intelligere, cur eo ipso quod in æqua-

tione

tione (A) omnes radices x sint reales, & inaequales, valor ejusdem x in aequatione (B) sub forma appareat imaginaria. Cum enim valor y in (B) substituendus pendeat a valore, quem obtinet x in aequatione (A); atque valor ejusdem x in hac aequatione major esse non possit quam $2\sqrt{p:3}$, neque ipsi aequalis; quantitas vero x realis esse nequeat, nisi sit x major quam $2\sqrt{p:3}$, vel ipsi aequalis, perspicuum est, quantitatem x in aequatione (B) formam induturam imaginariam, ubi eidem valor imaginariis involutus tribuatur.

SCHOLION

§. XVII.

Quae breviter attulimus, undenam imaginariorum implicatio illa in Binomio Cardani oriatur, satis dilucide patefacere videntur. Indolem igitur ipsius Binomii penitius aliquanto scrutari, atque evoluere operae pretium judicamus. Et primo quidem investigandum est, an ita ejusdem termini sint comparati, ut reapse, virtualiter saltem, contrarietate signorum se mutuo destruant imaginaria.

PROP. VII.

§. XVII.

Formulæ Cardanicæ in casu irreductibili tertii gradus

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

naturam explorare.

Ponatur $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)} = R + \sqrt{-S}$.

Quare ad tertiam Potestatem elatis quantitatibus, prodibit

$$\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)} = R^3 + 3R^2\sqrt{-S} - 3RS - S\sqrt{-S}.$$

Hoc posito, binæ fingantur Relationis æquationes inter R, S, p, q hujusmodi

$$R^3 - 3RS = \frac{q}{2}$$

$$3R^2\sqrt{-S} - S\sqrt{-S} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$$

vel

$$R^3 - 3RS = \frac{q}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$3R^2S - S^2 = \sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)} \ldots\ldots (B)$$

Quocunque modo expungatur indeterminata S ex binis æquationibus (A), & (B), ut Relatio prodeat inter R, p, q, vel hæc elicitur æquatio

R⁹ —

$$R^9 - 18R^8 + 81R^7 - \frac{3q}{2}R^6 + 18qR^5 - \frac{81q}{2}R^4$$
$$-\left(p^3 - \frac{15q^2}{2}\right)R^3 - \frac{9q^2}{2}R^2 - \frac{q^3}{8} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (C)$$

methodo, quam Præſtant. *Eulerus* in Actis Acad. Scient. Berolin., ad an. 1764, exhibuit, vel hujuſmodi ſimplicior, ratione jam uſitata,

$$R^7 - \frac{9}{4}R^6 + \frac{9q+1}{8}R^5 - \frac{5q}{8}R^4 + \left(\frac{7q^2}{8} + \frac{9q}{8} - \frac{p^3}{8}\right)R^3$$
$$+ \left(\frac{9q^2}{16} + \frac{q}{16}\right)R^2 + \frac{q^2}{16}R - \frac{q^3}{64} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (D)$$

Ut igitur æquationes (A), & (B), ſimul locum habere poſſint, ea inter R, p, q Relatio eſſe debet, quæ exprimitur per æquationem (C) vel (D). Æquationibus autem (A), (B) locum habentibus, exiſtet pariter æquatio

$$\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = R^3 - 3R^2\sqrt{-S} - 3RS + S\sqrt{-S}$$

vel hæc

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = R - \sqrt{-S}$$

& proinde hæc æqualitas

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} =$$
$$2R \;.\;.\;.\;.\;.\; (E)$$

Cum autem æquatio (C) vel (D) ſit gradus imparis, unus certe dabitur factor realis formæ $R + \mu = 0$, hoc eſt quantitas R uno ſaltem valore in p, & q donabitur prorſus reali. Ergo ſuffecto in

ſeries colligitur (Q), terminis in locis paribus conſtitutis, ob contrarietatem ſignorum, ſe mutuo deſtruentibus.

$$\frac{(A+\sqrt{B})^m+(A-\sqrt{B})^m}{2}=$$

$$A^m+\frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}A^{m-4}B^2$$

+ &c........ (Q). Q.E.I.

PROP. IX.

§. XX.

Formam ſeriei pro caſu irreductibili tertii gradus ex generali (Q) (§. præced.) derivare.

Reſumatur Formula Cardanica (C) (§. III.)

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)};$$

& quoniam $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=\sqrt{(-1)}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}$,

erit $A=\frac{q}{2}$, $\sqrt{B}=\sqrt{(-1)}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}$, $m=1:3$;

ideoque, ſubſtitutis hujuſmodi valoribus in ſerie præcedenti (Q), ſeries pro caſu irreductibili hanc habebit formam ex terminis realibus conflatam

$2\sqrt[3]{}$

posse, quod perinde est, demonstrasset. Propterea nodus etiamnum ex integro solvendus relinquitur. In id itaque vires intendendæ modo sunt, ut Seriei e Binomio eductæ indolem diligentius aliquanto pervestigemus.

PROP. VIII.

§. XIX.

Seriem in infinitum excurrentem ex aggregato

$$(A+\sqrt{B})^m+(A-\sqrt{B})^m$$

definire.

RESOLUTIO.

Binomium $A+\sqrt{B}$ ad Potestatem m evectum hanc præbet seriem

$$A^m+\frac{m}{1}A^{m-1}\sqrt{B}+\frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

$$A^{m-3}\sqrt{B^3}+\&c.....$$

Binomio vero $A-\sqrt{B}$ ad eandem Potestatem elato, series prodit

$$A^m-\frac{m}{1}A^{m-1}\sqrt{B}+\frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

$$A^{m-3}\sqrt{B^3}+\&c$$

Quare seriebus binis in unam summam redactis, series

PROP. X.

§. XXII.

Series infinita, cujus eſt terminus in genere

$$\frac{12n + 5}{18n^2 + 3n - 1}$$

exiſtente n indice terminorum numero quolibet integro affirmativo, terminis conſtat perpetuo decreſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur $n+1$, loco n, ut terminus in genere ordinis $n+1$ prodeat hujuſmodi

$$\frac{12n + 17}{18n^2 + 39n + 20}$$

Antecedens itaque quilibet erit ad proxime ſubſequentem terminum, ut

$$\frac{12n + 5}{18n^2 + 3n - 1} : \frac{12n + 17}{18n^2 + 39n + 20}$$

hoc eſt, ut

$$211n^3 + 558n^2 + 435n + 100 : 211n^3 + 342n^2 + 39n - 17$$

Verum, qualiſcunque integer numerus ſit n, antecedens rationis eſt manifeſto conſequente majus. Ergo ſeries terminis conſtat perpetuo decreſcentibus. Q. E. D.

COROLL.

COROLL.

§. XXIII.

Quare series, cujus foret Terminus in genere

$$1 + \frac{12n + 5}{18n^2 + 3n - 1}, \quad \text{ve}$$

$$\frac{18n^2 + 15n + 4}{18n^2 + 3n - 1}$$

erit quoque decrescens; atque Terminus Seriei maximus erit manifesto primus in ordine, cujus scilicet index $n = 1$.

PROP. XI.

§. XXIV.

Quotiscunque fuerit in æquatione Cubica $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{37q^2}{40}$, Series ex evolutione Binomii Cardanici orta terminis constat crescentibus in infinitum.

$$\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$$

Termini Seriei (S) erunt continuo crefcentes, fi fuerit $\frac{p^3}{27} > \frac{37q^2}{40}$. Q. E. D.

PROP. XII.

§. XXV.

Quotiefcunque fuerit in Æquatione cubica $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$, vel ipfi æquale, feries ex refolutione Binomii Cardanici evoluta terminis conftat perpetuo decrefcentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur enim, ut ante, A antecedens quilibet terminus, S proxime fubfequens, erit quidem (§. XXIV.)

$$A : S = (2n+1)(2n+2) : (6n-1)(6n+2)z^2$$

Termini itaque in Serie decrefcent, fi fuerit (ibid.)

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$$

Cum

Cum autem fit $\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$ unitate majus, erit, quocunque casu,

$$\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right) > \frac{q^2}{2}$$

Ergo existente, ex hypothesi, $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}$, vel ipsi æquali, erit eo magis

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$$

ideoque termini Seriei continuo decrescent. Q. E. D.

SCHOLION.

§. XXVI.

Demonstratum est igitur seriem casus irreductibilis esse perpetuo divergentem, quotiescunque fuerit in Cubica Æqnatione $\frac{p^3}{27} > \frac{37q^2}{40}$; atque contra continuo fore decrescentem, si fuerit $\frac{p^3}{27} < \frac{20q^2}{40}$, vel ipsi æquale. Quid porro de serie pronuntiandum, si $\frac{p^3}{27}$ intra hos limites constituatur, ut sit majus quam $\frac{20q^2}{40}$, minus vero quam $\frac{37q^2}{40}$?

PROP.

PROP. XIII.

§. XXVII.

Si in Æquatione Cubica fuerit $\frac{p^3}{27}$ intra limites constitutum $\frac{20q^2}{40}$, atque $\frac{37q^2}{40}$, Series (S) (§. XXI.) terminis primo constabit decrescentibus; mutata postea lege fiet crescens, pergentque termini divergere in infinitum.

DEMONSTRATIO.

Terminus Generalis $\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$ actu evolvatur, ponendo successive, loco n, naturales numeros 1, 2, 3 &c.
Prodibit Series hujusmodi

$$\frac{37}{20},\ \frac{53}{37},\ \frac{211}{170},\ \frac{44}{37},\ \&c.$$

cujus utique termini decrescunt (§. XXIII.), pergentque decrescere etiamsi multiplicentur per communem factorem $\frac{q^2}{2}$, quo series evadet

$$\frac{37q^2}{40},\ \frac{57q^2}{74},\ \frac{211q^2}{340},\ \frac{44q^2}{74},\ \&c. \ldots\ldots (M)$$

Certum

Certum itaque eſt Terminum quemcunque Seriei (M) majorem eſſe quam $\frac{20q^2}{40}$, minorem vero priori termino in ordine $\frac{37q^2}{40}$. Cum autem ponatur $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{20q^2}{40}$, minus quam $\frac{37q^2}{40}$, manifeſtum eſt, vel poſito $\frac{p^3}{27}$ alicui horumce terminorum æquali, vel intra duos conſtituto, fore $\frac{p^3}{27}$ ſingulis terminis antecedentibus minus, ſingulis vero ſubſequentibus majus. Verum uſque dum $\frac{p^3}{27}$ minus eſt quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$, termini Seriei (S) decreſcere debent (§. XXV.), contra vero creſcere, ſi fuerit $\frac{p^3}{27}$ eadem quantitate maius (§. XXIV.). Ergo exiſtente n numero terminorum initialium, quorum quilibet major eſt quam $\frac{p^3}{27}$, Seriei (S) termini, uſque ad terminum ordinis n incluſive, primo decreſcent, deinde creſcere incipient, pergentque divergere in infinitum. Q. E. D.

SCHO-

SCHOLION.

§. XXVIII.

Seriei casus irreductibilis (S) (§. xxi.) hucusque indolem ita evolvimus, ut, quando ex terminis perpetuo crescentibus, quandoque decrescentibus coalescat, tuto pronuntiare possimus. Ejusmodi itaque Serierum in infinitum continuitarum valores in genere, actu singulorum parium differentias sumendo, ulterius perpendi merentur. Sequentia hunc in finem præmittamus.

PROP. XIV.

§. XXIX.

Seriei, quæ in infinitum protensa summa prædita est finita, nullum accedit augmentum, etiamsi duplo, triplo, vel in genere *n*. plo longius continuetur.

Ponatur enim id, quod post infinitum Seriei superaddi censetur, nequaquam evanescere. Summa Seriei in infinitum continuatæ haud erit finita; quod est contra hypothesim. Ergo &c.

COROLL.

§. XXX.

Si igitur, quod ex continuatione Seriei ultra terminum infinitesimum oritur sit finitæ vel infinitæ magnitudinis, summa Seriei erit necessario infinita. Finita autem erit Seriei summa, si quod ex continuatione ultra infinitesimum terminum gignitur fuerit quantitatis prorsus evanescentis.

SCHOLION.

S. XXXI.

Cryterium ex hoc facillimo principio, idque usui accommodatum, colligitur, dignoscendi utrum series quæpiam proposita in infinitum continuata summa donetur finita vel infinita. Summus *Eulerus* demonstrationem inde derivavit progressionis harmonicæ

$$\frac{c}{a},\ \frac{c}{a+b},\ \frac{c}{a+2b}\ \&c.\ldots\ldots\ \frac{c}{a+(n-1)b}\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

ut ut termini seriei perpetuo decrescant, summam esse infinite magnam, tali pacto (Com. Acad. Imp. Petrop. ad An. 1734.).

e Esto

Esto Seriei(A) terminus infinitesimus $\frac{c}{a+(i-c)b}$, denotante i numerum infinitum. Continuari censeatur series ab termino $\frac{c}{a+(i-1)b}$ ad terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, cujus index ni. Terminorum adjectorum numerus erit $(n-1)i$. Est autem eorundem summa minor quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$, major vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$, hoc est minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$, major quam $\frac{(n-1)c}{nb}$, evanescente finita magnitudine a respectu i. Ergo summa horumce terminorum erit finita, ideoque summa seriei (A) in infinitum continuatæ, infinita (§.XXX.).

PROP. XV.

§. XXXII.

Quantitas finita unitate major ad Potentiam infinite magnam i evecta infinitam conficit magnitudinem ipso infinito i inassignabili infinitate majorem.

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit A quantitas finita. Et quoniam est A major unitate, ponatur $A = 1 + \omega$. Elevetur quantitas $1 + \omega$ ad Potestatem i. Erit

$$(1+\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}\omega + \frac{i(i-1)}{1.2}\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\omega^3 +$$

&c. Cum autem numeri finiti 1, 2, 3, &c. præ i evanescant, erit

$$A^i = (1+\omega)^i = i\omega + i^2.\frac{\omega^2}{2} + i^3.\frac{\omega^3}{6} + \&c....$$

Sed factum ex quantitate finita in quantitatem infinitam ordinis n, ejusdem est ipsius ordinis factoris infiniti. Ergo terminus quilibet infinitinomii $i^n.\frac{\omega^n}{1.2...n}$ erit infinitum ordinis n. Cum vero infinitum i sit terminorum hujusmodi aggregato inassignabili infinitate minus, erit A^i inassignabili infinitate majus ipso infinito i. Q. E. D.

COROLL.

§. XXXIII.

Facile hinc statui potest eandem Potestatem A^i majorem quoque futuram, infinitate prorsus

 ina-

inassignabili, quam i^m, dum exponens m in finitis consistat quantitatibus. Plura praeterea tum ad logarithmos spectantia infinitorum diversi ordinis cum numeris infinitis comparandos, cum ad alia in Theoria infinitorum, & infinitesimorum explananda derivari possent: sed alterius haec esse loci, atque occasionis videntur.

PROP. XVI.

§. XXXIV.

Seriei

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8.....14z^6}{2.3.....6} + \frac{2.5.8.....26z^{10}}{2.3.....10} .... \frac{2.5.8........(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4......(4n-2)} .... (\Delta)$$

terminum infinitesimum definire.

RESOLUTIO.

Seriei (Δ) tribuatur forma (μ)

$$\frac{(12n-10)}{(4n-2)} + \frac{(12n-22)}{(4n-6)}\frac{(12n-19)}{(4n-5)}\frac{(12n-16)}{(4n-4)}\frac{(12n-13)}{(4n-3)}\frac{(12n-10)z^{4n-2}}{(4n-2)} + \&c. ...... (\mu)$$

in qua

in qua si ponatur in primo termino $n = 1$, in secundo $n = 2$, in tertio $n = 3$, & ita porro, prodibit primus terminus Seriei (Δ), secundus, tertius, & ita porro; Eritque hujusce formæ Terminus in genere ordinis n, qui sequitur

$$\frac{\ldots\&c.\,(12n-31)(12n-28)(12n-25)(12n-22)}{\ldots\&c.\,(4n-9)\quad(4n-8)\quad(4n-7)\quad(4n-6)}\cdot\frac{(12n-19)(12n-16)(12n-13)(12n-10)z^{4n-2}}{(4n-5)\quad(4n-4)\quad(4n-3)\quad(4n-2)}$$

In quo facile videre est numerum factorum cujusque termini ordinis n fore $4n - 3$. Quare in termino infinitesimo, existente indice n quantitate infinita $= i$, numerus quoque factorum hujus termini erit $4i - 3$. Cum autem præ i quantitate infinite magna evanescant quantitates finitæ, quæ in quolibet insunt factore numeratoris, & denominatoris Termini infinitesimi, numerator erit manifesto $(12n)^{4n-3}\,z^{4n-2}$, hoc est $(12i)^{4i-3}$ z^{4i-2}, denominator vero $(4i)^{4i-3}$. Ergo Terminus ipse infinitesimus Seriei (Δ) erit

$$\frac{12^{4i}\,z^{4i}}{12^3\,z^2} : \frac{4^{4i}}{4^3} = \frac{3^{4i}\,z^{4i}}{3^3\,z^2} = \frac{1}{27z^2}\cdot(3z)^{4i}.\ \text{Q.E.I.}$$

PROP.

PROP. XVII.

§. XXV.

Terminum in genere definire Seriei ex differentiis actu sumtis conflatæ terminorum ordinis n in infinitum Serierum

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5\ldots 14z^6}{2.3\ldots 6} + \frac{2.5\ldots 26z^{10}}{2.3\ldots\ldots 10} + \&\ldots\ldots (A)$$

$$\frac{2.5.8.z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.8\ldots\ldots 20z^8}{2.3\ldots 8} + \frac{2.5.8\ldots\ldots 32z^{12}}{2.3\ldots\ldots 12}$$

$+$ &c. ..... (B)

ex quarum differentia Series (S) casus irreductibilis

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5\ldots\ldots 14z^6}{2.3\ldots\ldots 6} - \frac{2.5\ldots\ldots 20z^8}{2.3\ldots 8}$$

$+$ &c...... (S) coalescit.

RESOLUTIO.

Cum Seriei (A) sit terminus in genere

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots\ldots (12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots\ldots (4n-2)}$$

Seriei vero (B)

2.5.

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-4)z^{4n}}{2.3.4\ldots\ldots(4n)}$$

dicatur P terminus ordinis n Seriei (A), Q terminus ejusdem ordinis Seriei (B). Certum est fore

$$P:Q = \frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots\ldots(4n-2)} : \frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-4)z^{4n}}{2.3.4\ldots\ldots(4n)}$$

Ergo, eliso communi factore, redactisque quantitatibus, erit

$$P : Q = (4n-1)4n : (12n-7)(12n-4)z^2$$

Hinc dividendo

$$P-Q:P = ((4n-1)4n-(12n-7)(12n-4)z^2):(4n-1)4n$$

quare

$$P-Q = P\left(\frac{4n(4n-1)-(12n-7)(12n-4)z^2}{(4n-1)4n}\right)\ldots$$

..... (C)

Et terminus in genere propositæ seriei erit manifesto

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots\ldots(4n-2)}\left(\frac{4n(5n-1)-(12n-7)(12n-4)z^2}{(4n-1)4n}\right)$$

.....(D). Q. E. I.

COROLL.

COROLL. I.

§. XXXVI.

Dato itaque ejusmodi seriei termino generali (D), facile est ejusdem terminum infinitesimum definire. Nam existente infinitesimo P seriei (A) (§. XXXIV.) $= \frac{1}{27z^2}(3z)^{n}$, si in multiplicatore ejusdem P in Æquatione (C) (§. præced.) fiat ubique n infinita $= i$, evadit ille $= 1 - 9z^2$. Ergo terminus infinitesimus seriei P − Q fit

$$\frac{1 - 9z^2}{27z^2}(3z)^{i} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (E)$$

COROLL. II.

§. XXXVII.

Quapropter, prout fuerit $3z$ majus, vel minus unitate, terminus (E) infinitesimus seriei, cujus est generalis terminus (D), erit infinitæ vel infinite parvæ magnitudinis.

PROP.

PROP. XVIII.

§. XXXVIII.

Seriei, cujus est (D) Terminus ordinis n, in infinitum continuatæ summa est finita quotiescunque fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$.

DEMONSTRATIO.

Cum sit $z = \frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$ (§. XXI.), atque ex hypothesi $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}$, erit $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$ $= 3z$ minus unitate, & proinde Terminus Seriei Infinitesimus infinite parvæ magnitudinis. Fiat itaque $3^4 z^4 = \frac{1}{1+\omega}$, ut sit $(3z)^{4i} = \frac{1}{(1+\omega)^i} =$

$$\frac{1}{i\omega + i^2 . \frac{\omega^2}{2} + i^3 . \frac{\omega^3}{6} \&c. \ldots .}$$

(§. XXXII.); Atque series proposita, facto $\frac{1 - 9z^2}{27z^2} = R$, continuari censeatur ab termino infinitesimo ad terminum indicis $n\,i$. Terminorum

f adie-

adiectorum numerus erit $(n-1)i$. Cum autem Series decrescat (§.xxv.), erit Terminorum adiectorum summa minor quam fractio

$$\frac{(n-1)iR}{i\omega + i^2 . \frac{\omega^2}{2} + i^3 . \frac{\omega^3}{6} + \&c. \ldots}$$

hoc est minor quam fractio

$$\frac{(n-1)R}{\omega + i . \frac{\omega^2}{2} + i^2 . \frac{\omega^3}{6} + i^3 . \frac{\omega^4}{24} + \&c. \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots (\xi)$$

Est autem (ξ) quantitas inassignabili infinitate infinite parvæ magnitudinis ; & est terminorum post infinitesimum adiectorum summa hac ipsa quantitate minor. Ergo ex eo , quod Seriei propositæ in infinitum continuatæ addi intelligitur , nullum Seriei valori accedit augmentum. Est igitur series proposita summa prædita finita (§. xxx.). Q. E. D.

PROP. XIX.

§. XXXIX.

Seriei ejusdem summa , quotiescumque fuerit $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{2}$, est ordinis elatissimi infinite magna.

DE-

DEMONSTRATIO.

Posito enim $p^3 : 27 > q^2 : 2$, fit $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$, hoc est $3z$, majus unitate, & proinde terminus Seriei infinitesimus ordinis elatissimi infinite magnus. Cumque Seriei ejusdem termini continuo crescant (§. XXIV.), eodem, quo ante, modo demonstrabitur, terminorum, qui post infinitesimum addi censentur, summam fore infinitam, ideoque Seriei summam valoris esse infinite magni ordinis elatissimi. Ergo &c. Q. E. D.

COROLL.

§. XL.

Series igitur casus irreductibilis Tertii gradus tum tantum est decrescens (§. XXV.), atque valoris finiti (§. XXXVIII.), cum in Æquatione Cubica fuerit $\frac{p^3}{27}$ intra limites constitutum $q^2:4$, atque $q^2:2$. Quotiescunque vero fuerit $p^3:27$ majus quam $q^2:2$, series ex evolutione Binomii Cardanici genita vel terminis constat perpetuo crescentibus, vel saltem in terminos desinit crescentes in infini-

tum, initialibus tantum aliquot prædita decrescentibus, differentiis etiam singulorum parium actu sumtis. Quo plane ostenditur, etiamsi series terminis donetur alternatim positivis & negativis, differentiam tamen serierum in infinitum continuatarum haud esse finitam, veluti non raro in ejusmodi seriebus volutandis contingere novimus.

SCHOLION.

§. XLI.

Nodum hic rursus solutu difficilem obiici, me non monente, apparet. Binomium siquidem Cardani in genere quidpiam esse necessario reale, non quidem meris freti suspicionibus, vel virtuali pensatione, sed certioribus Cartesianæ Algebræ principiis, regulisque innixi, demonstravimus luculenter (§. XVII.). Verum Binomio in seriem converso, quædam fit veluti quantitatum disgregatio, qua casuum irreductibilium Classis veluti quædam ab aliis quodammodo dissociatur. Dum enim certis tantum casibus series quantitatum respondet continuo decrescentium, atque summa prædita finita, cæteris omnibus series prodit ex terminis continuo crescentibus conflata, atque summa prædita valoris infinite magni. Undenam implicatio hæc, ut quantitati

finitæ,

per resolutionem rite
gni?
ractionum rationalium
psmodi jamdiu conside-
u a veritate quam ma-
erum difficultatum so-
sionis residuis repeten-
Potentiarum evolutio-
mo itaque in mysterii
, de integro serierum
a Potestatibus Polino-
pervolvendam, scru-
quæ exinde in Theoria
datum fuit, consilii
mendabunt quam maxi-
uerit, quæ sequuntur,

SECTIO II.

§. XLII.

SErierum divergentium Theoria, quarum ſcilicet termini continuo creſcunt, ſive ex fractionum reſolutione, ſive ex Polinomiorum Poteſtatibus indicis fracti evolvantur, duabus præcipue graviſſimis difficultatibus afficitur; quarum una in eo eſt, ut enodetur, quo pacto, quave penſatione fieri poſſit, ut dum ex una Æquationis parte quantitas evoluta ſemper eadem manet, alterum Æquationis membrum perpetuo creſcat a valore propoſito magis, magiſque recedendo, & fiat tandem magnitudinis prorſus infinitæ. Alterum vero difficultatis caput potiſſimum eſt, ut, ſoluto etiam priori nodo, ſtatuatur an rejici debeant nec ne ex Matheſi univerſa ſeries divergentes, vel an, iiſdem admiſſis, quantitas finita, quæ veluti ſumma ſeriei ex ipſa reſolutionis natura obiicitur, pro aggregato omnium terminorum actu collectorum ſumi

tuto

tuto possit, & versa vice, incolumi æqualium quantitatum notione. Nemini profecto ignotum esse potest, in seriebus a resolutione fractionum genitis, Residua divisionis necessario considerari debere, quorum proinde habita ratione, præcipuas, quæ in series divergentes passim congeruntur, difficultates enucleari, atque exsolvi posse, compertum est. Verumtamen, ne hujusmodi quidem residuorum considerationis ope, secundæ nobis allatæ Quæstioni satisfactum hactenus fuisse cognoscent, quos Auctorum circa series infinitas scripta perlegere non piguerit. Quo autem pacto in seriebus ab evolutis Potestatibus ortis, residuorum tum præsidio locum nequaquam habente, nodi extricari possint, etiamsi multa solutu æque difficilia occurrant, qui explicuerit, me prorsus latet. Incomparabili *Eulero* circa series a fractionibus oriundas versanti eædem ipsæ difficultates se se considerandæ obtulerunt. Quæ ideo a tanti præsertim Viri sagacitate proferuntur ex integro transcribenda, non abs re fore existimamus (Vid. Instit. Calculi Different. Cap. III. pag. 95, 96, 97.)

„ Ex his quidam concluserunt hujusmodi se-
„ ries, quæ vocantur divergentes, prorsus nullas
„ habere summas fixas, propterea quod colligendis
„ actu terminis ad nullum limitem fiat appropin-
„ quatio, qui pro summa seriei in infinitum con-

„ tinua-

„ timatæ haberi possit: quæ sententia cum istæ
„ summæ jam ob neglecta ultima residua erroneæ
„ sint ostensæ, veritati maxime est consentanea.
„ Interim tamen contra eam summo jure obiici
„ potest, has memoratas summas, quantumvis a
„ veritate abhorrere videantur, tamen nusquam in
„ in errores inducere; quin potius, iis admissis,
„ plurima præclara esse eruta, quibus, si istas sum-
„ mationes prorsus rejicere vellemus, carendum
„ esset. Neque vero hæ summæ, si essent falsæ,
„ perpetuo ad veritatem nos ducere possent; quin
„ potius cum non parum sed infinite a veritate
„ discrepent, nos quoque in infinitum a vero se-
„ ducere deberent. Quod tamen cum non eveniat,
„ *difficillimus nobis restat nodus solvendus*.

„ Dico igitur in voce summæ latere totam
„ difficultatem. Si enim summa seriei, ut vulgo
„ usus fert, sumatur pro aggregato omnium ejus
„ terminorum actu collectorum, tum dubium est
„ nullum, quin earum tantum serierum in infini-
„ tum excurrentium summæ exhiberi queant, quæ
„ sint convergentes, atque continuo propius ad
„ certum statumque valorem deducant, quo plures
„ termini actu colligantur. Series autem divergen-
„ tes, quarum termini non decrescunt, sive signa
„ + & − alternentur, sive secus, prorsus nullas
„ habebunt summas fixas; siquidem vox summæ

„ hoc sensu pro aggregato omnium terminorum
„ accipiatur. At vero in iis casibus, quorum me-
„ minimus, quibus ex istiusmodi summis erroneis,
„ veritas tamen elicitur, id non fit, quatenus ex-
„ pressio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, est summa se-
„ riei $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. sed quatenus ea ex-
„ pressio evoluta hanc Seriem præbet; sicque in
„ hoc negotio nomen summæ prorsus ommitti
„ posset.

„ Hæc igitur incommoda, hasque apparentes
„ contradictiones penitus evitabimus, si voci sum-
„ mæ aliam notionem, atque vulgo fieri solet, tri-
„ buamus. Dicamus ergo Seriei cujusque infinitæ
„ summam esse expressionem finitam ex cujus evo-
„ lutione illa series nascatur. Hocque sensu Seriei
„ infinitæ $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. Summa revera
„ erit $= \frac{1}{1-x}$, quia illa series ex hujus fractionis
„ evolutione oritur, quicunque numerus loco x
„ substituatur. Hoc pacto, si series fuerit conver-
„ gens, ista nova vocis summæ definitio cum con-
„ sueta congruet; & quia divergentes nullas habent
„ summas proprie sic dictas, hinc nullum incom-
„ modum ex nova hac appellatione orietur. Deni-
„ que ope hujus definitionis utilitatem serierum
„ diver-

„ divergentium tueri, atque ab omnibus injuriis
„ vindicare poterimus.

Hærere primo Vir ſapientiſſimus, aliquo modo, videtur circa ſeries divergentes, an ſcilicet admitti debeant nec ne. Cum vero eaſdem nuſquam in errorem induxiſſe conſideret, *nodum ſibi ſolvendum relinqui difficillimum*, ait. Id itaque conſilium ingreditur, ut, mutata ſummæ definitione, uſum atque utilitatem Serierum divergentium vindicare conetur. Rei difficultatem ipſa conſilii ratio comprobat manifeſto. Non omnis enim, tali pacto, dubitandi anſa ſublata eſt, nec omnino quæſtionibus ſatisfieri, facile perpendenti patet. Ponatur reapſe, quantitatem finitam, unde ſeries orta eſt, pro ſerie ipſa divergente, vel ſeriem, ejuſdem quantitatis finitæ loco, tuto ſumi poſſe. Etiamſi, definitionis vi, quantitatem tantum ſumtam eſſe intelligatur, loco Seriei, ex cujus evolutione ſeries nata eſt, vel ſeriem, loco ejuſdem quantitatis, utpote ex ipſius reſolutione genitam, actu tamen fit tacita ſuppoſitio, alteram alteri æqualem eſſe; alioquin ſubſtitutio fieri non poſſet, incolumi quantitatum altera alteri ſubrogandarum conditione. Quod profecto idem ipſe eſt quæſtionis cardo. Definitio itaque Præſtantiſſimi *Euleri* conſulte quidem invecta, atque retinenda videtur. Serierum tamen divergentium Theoriam aliquo ſecus tuendam eſſe,

atque ex aliis principiis ab injuriis vindicandam, fatendum est. Id igitur in primis curandum, ut Serierum infinitarum genesim paulo accuratius evolvamus. Via fortasse aperietur, qua tum ad nodos recensitos expediendos, cum ad indaginis nostræ, circa casum irreductibilem tertii gradus, mysteria sin minus enodanda, intimius saltem noscenda, facile perducamur.

PROP. XX.

§. XLIII.

Positis X, Y quantitatibus quibuscunque, Seriei ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{X-Y}$$

ortæ genesin, atque indolem investigare.

RESOLUTIO.

Resolvatur per continuam divisionem fractio, ut prodeat

$$\frac{1}{X-Y}=\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}+\frac{Y^2}{X^3}+\frac{Y^3}{X^4}+\&c. \ldots\ldots \frac{Y^{n-1}}{X^n}$$

exi-

existente $\frac{Y^{n-1}}{X^n}$ termino seriei generali. Erit itaque Terminus quilibet ad proxime subsequentem, ut

$$\frac{Y^{n-1}}{X^n} : \frac{Y^n}{X^{n+1}} = \frac{1}{Y} : \frac{1}{X} = X : Y$$

Prout igitur in denominatore fractionis fuerit X majus vel minus quam Y, erunt in serie antecedentes termini proxime subsequentibus majores vel minores; Series scilicet terminis constabit decrescentibus, vel crescentibus in infinitum. Certum praeterea est, vel series continuo ad valorem $\frac{1}{X-Y}$ acccedat, vel ab eo recedat, idipsum, seriei compositione, reproduci debere, a quo ope resolutionis series orta est. Et quoniam nulla est ratio, qua divisioni unus potius, quam alter limes necessario praescribatur, tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, fractionem ipsam perpetuo Series restituere debet. Compositione itaque rite perhabita, ubicunque vel in terminis numero finitis vel infinitis consistamus, serie vero posita tam decrescente quam crescente quoquomodo, ratione ab ipsa Seriei genesi petita, eandem semper reviviscere quantitatem $\frac{1}{X-Y}$, demonstrandum est. Aliquid igitur addi semper debere Seriei, quae ad

verum

verum valorem $\frac{1}{X-Y}$ accedit, pronum eſt colligere, idque eo minus, quo magis convergit Series; & contra aliquid detrahi, ſi divergat ſeries, idque eo majus, quo magis ipſa a vero valore recedit. Quapropter, reſolutione fractionis reſumta, diviſionem in terminis numero finitis gradatim abrumpamus. Hujuſmodi profecto prodibunt Æquationes

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X(X-Y)}$$

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^2(X-Y)}$$

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \frac{Y^3}{X^3(X-Y)}$$

&c.........

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \&c. \ldots \frac{Y^{n-1}}{X^n} \ldots\ldots + \frac{Y^n}{X^n(X-Y)} \ldots\ldots (A)$$

exprimente indice n numero terminorum Reſiduo præcedentium. Horumce itaque terminorum inveniatur ſeorſim ſumma Generalis. Erit hæc per cognitas Serierum Geometricarum methodos, quæ ſequitur.

$$\frac{X^n - Y^n}{X^n(X-Y)}$$

Jam

Jam ex ipsa Seriei genesi, atque ad summæ generalis naturam attendendo, manifestum est, vel termini numero n adsint in Æquatione (A), vel eorundem summa

$$\frac{X^n - Y^n}{X^n(X - Y)}$$

nullam Æquationi inferri mutationem. Suffecto igitur in Æquatione (A) terminorum congeriei Termino eodem summatorio, induet illa hanc formam

$$\frac{1}{X - Y} = \frac{X^n - Y^n}{X^n(X - Y)} + \frac{Y^n}{X^n(X - Y)} \ldots\ldots\ldots (B)$$

id quod eandem prorsus restituit quantitatem $\frac{1}{X - Y}$. A finitis hinc ad infinita transeundo, ponatur in Æquatione (B) n numero infinito $= \infty$; Erit itidem

$$\frac{1}{X - Y} = \frac{X^\infty - Y^\infty}{X^\infty(X - Y)} + \frac{Y^\infty}{X^\infty(X - Y)} = \frac{1}{X - Y}$$

Ergo tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, compositione terminorum Seriei rite & ad resolutionis normam perhabita, eadem ipsa reproducitur fractio

$$\frac{1}{X - Y}$$

ex cujus evolutione Series genita est, Serie posita tam ad verum valorem continuo accedente, quam ab eodem continuo recedente. Indoles proinde Seriei a resolutione Fractionis $\frac{1}{X - Y}$ ortæ explorata est.

Q.E.F.

PROP. XXI.

§. XLIV.

Naturam Seriei a resolutione fractionis

$$\frac{1}{X + Y}$$

genitæ, positis, ut ante, X & Y quantitatibus quibuscunque, investigare.

RESOLUTIO.

Loco Y in serie (A) Propos. præcedentis ponatur − Y. Prodibit Series (B)

$$\frac{1}{X+Y}=\frac{1}{X}-\frac{Y}{X^2}+\frac{Y^2}{X^3}-\&c.\ldots\frac{Y^{n-1}}{X^n}\ldots\ldots\pm\frac{Y^n}{X^n(X-Y)}\ldots\ldots(B)$$

residuo existente positivo vel negativo, prout fuerit numerus terminorum n par vel impar. Summa autem Generalis terminorum residuo præcedentium erit

$$\frac{X^n\mp Y^n}{X^n(X+Y)}$$

signo superiori vel inferiori locum habente, prout itidem fuerit numerus terminorum n par vel impar. Erit igitur, ut ante, in finitis

$$\frac{1}{X+Y}=\frac{X^n\mp Y^n}{X^n(X+Y)}\pm\frac{Y^n}{X^n(X+Y)}=\frac{1}{X+Y}$$

atque in infinitis

$$\frac{1}{X+Y}=\frac{X^\infty\mp Y^\infty}{X^\infty(X+Y)}\pm\frac{Y^\infty}{X^\infty(X+Y)}=\frac{1}{X+Y}$$

Ergo in finitis, atque in infinitis terminis, per compositionem terminorum, eadem ipsa restituitur fractio $\frac{1}{X+Y}$, ex qua Series orta est, tam in decrescentibus, quam in continuo crescentibus seriebus. Q. E. Expl.

COROLL. I.

§. XLV.

Ad quantitates (C),

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^n \cdot \frac{1}{X \mp Y} \text{ ....(C)}$$

quæ in compoſitionibus terminorum ſe mutuo deſtruunt, ſignorum contrarietate, attendendo, perſpicuum eſt, eo minores evadere, dum $\frac{Y}{X}$ ſit unitate minus, quo Series eo propius convergendo ad verum valorem accedit, & in infinitum abeunte ſerie, fieri tandem infinite parvas. Contra vero, exiſtente $\frac{Y}{X}$ unitate majori, eo majores fieri, quo magis ſeriès a vero valore divergendo recedit, atque demum evadere valoris infinite magni.

COROLL. II.

§. XLVI.

Colligitur hinc quoque Auctores complurimos, & præſertim celeb. *Varignonium*, quæ reapſe in fractio-

ctionum evolutionibus rite peractis irrepere non possunt, absurda quædam veluti a Serierum divergentium indole profecta, ex incompleta tantum compositione deduxisse (Com. Acad. Scient. Parif. ad An. 1715.).

COROLL. III.

§. XLVII.

Patet itaque in finitis quantitatem $\frac{1}{X}$ æquari non posse $\frac{1}{X-Y}$ (§. XLIII.), nisi ei addatur $\frac{Y}{X(X-Y)}$; neque quantitatem $\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}$, nisi huic addatur $\frac{Y^2}{X^2(X-Y)}$; & in genere Seriem

$$\frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \frac{Y^3}{X^4} + \&c. \dots\dots$$

æquari non posse eidem quantitati $\frac{1}{X-Y}$, nisi seriei addatur quantitas

$$\frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

DEFINITIO.

§. XLVIII.

Dicantur ideo divisionis Residua in genere,

$$\frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

Complementa, utpote quibus Series compleri debentur, ut fractio resoluta rursus per compositionem reproducatur.

COROLL. IV.

§. XLIX.

Quod si Series

$$\frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \&c. \ldots\ldots\ldots (A)$$

ultra quoscunque limites continuari sine fine censeatur, etiamsi *Complementum* actu Seriei assignari non possit, quo fractio $\frac{1}{X-Y}$ explicite restituatur, ex ipsa tamen Seriei genesi consequitur, seriem (A) necessario complementum involvere virtualiter, atque implicite; alioquin compositio foret incompleta.

DE-

DEFINITIO II.

§. L.

Series igitur

$$\frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

in terminis numero finitis, explicite completa nuncupari poteſt, utpote quæ complemento explicite aſſignabili prædita eſt, quo fractio, unde oritur, reproduci poſſit. In terminis vero infinitis, implicite completa nuncupetur. Cum enim complemento explicito & determinato careat, quippe quæ ſine fine progreditur, & quantitatem tamen $\frac{1}{X-Y}$, a cujus evolutione generatur, ipſa quoque reſtituere debeat, penſatione implicita id fieri, intelligendum eſt, quantitatum infinite parvarum in ſeriebus convergentibus, atque infinitarum in divergentibus, ſe mutuo deſtruentium (§. XLV.).

CO-

COROLL. V.

§. LI.

Propterea eo ipſo, quod in terminis numero finitis, complementa explicite, actuque exhiberi queunt, ſeries tam convergentes quam divergentes, niſi ſine fine terminis excurrere cenſeantur, pro implicite completis haberi non poſſunt. Revera ſeries, cujus termini ſine fine continuari intelliguntur, pro unica, atque unico veluti complenda reſiduo, conſiderari neceſſario debet. Contra vero in terminis finitis, nulla eſt ratio, qua potius Series n terminorum, ut implicite completa ſumatur, quam $n+1$, vel in genere $n+m$. Quod totidem inter ſe diverſa implicare complementa, quorum ratio habenda foret, manifeſtum eſt.

COROLL. VI.

§. LII.

Series ideo tam convergentes, quam divergentes nil niſi quantitatem $\frac{1}{X \mp Y}$ actu exprimunt, ex cujus evolutione ortæ ſunt, hoc unico diſcrimine,

ne, quod in explicite completis, explicite quoque complementa assignentur: in seriebus vero sine fine progredientibus, vel implicite completis, complementa quidem involvi, sed potentialiter, censendum sit.

SCHOLION I.

§. LIII.

Si quæ hucusque attulimus vel levi attentione perpendantur, facile inferre licebit, ex impropria tantum, atque incompleta compositione, series divergentes, modo veluti falsas, modo ad absurda deducentes passim consideratas fuisse. Quonam pacto, quove jure quantitatem finitam, a qua series est educta, cum serie ipsa, naturali Complemento mutilata, comparare contendimus? neglectis siquidem in collectione partium, quæ series implicite involvere, natura ipsa resolutionis petente, necessario existimandæ sunt, quæque nullo modo negligi debent, neque quantitates, quæ in partes sunt actu resolutæ, restitui, neque absurda evitari queunt. Series profecto divergens, prout objicitur, ex terminis continuo crescentibus coalescens, nulla Complementi necessario considerandi habita ratione, cum ipsa quantitate a qua per evolutionem gigni-

gignitur, ne comparari quidem rite poteſt, nedum ipſi æquari. Hinc primæ difficultatis initio prolatæ (§. XLII.) plenariam ſolutionem colligi, ſerieſque divergentes ab injuriis vindicari, nemo eſt, qui per ſe ſe non cognoſcat. Sed & alteri quoque uberrime ſatisfieri poſſe, dilucide apparet. Cum enim ejuſmodi ſeries, nil aliud revera exprimant, quam eandem quantitatem a qua per reſolutionem ſunt enatæ, æque ac ipſæ convergentes ſeries, implicite ſua quæque inſeparabilia *Complementa* complectentes, longe abeſt, ut ex Matheſi rejici debeant, niſi eodem jure & convergentes rejiciantur. Tuto proinde concludendum eſt, finitam quantitatem unde oriuntur, pro ipſa ſerie, & verſa vice, ſumi poſſe, incolumi æqualium quantitatum notione, dum in terminis numero finitis nequaquam conſiſtamus, ſed integra utamur ſerie in infinitum progrediente. Neque alio modo ſeries ipſas convergentes, quantitatum finitarum loco, e quarum evolutione genitæ ſunt, uſurpare licet. Quotieſcunque enim termini numero finiti pro ipſa ſerie ſumuntur, vis revera rigori mathematico infertur, & vero proxima pro veris ſubrogantur, praxeos tantum facilitatis gratia.

SCHO-

SCHOLION II.

§. LIV.

Hisce positis ab ipsa serierum natura ultro veluti profectis, nullos inde neque in comparationibus, neque in substitutionibus errores irrepere potuisse, mihi videtur. Si enim tum cautio, qua divergentes series ab Analystis passim in Problematum solutionibus tractantur, cum quantitatis, unde seriem per evolutionem oriri ponitur, loco seriei substituendæ, ratio perpendatur, facile dignoscemus, easdem ipsas, quæ instituuntur, operationes per se Complementi considerationem virtualiter complecti. Reapse si ad seriem aliquam deducat Problema, nemo sane inter Analystas est, qui initialibus statim aliquot terminis collectis, eorundem summam, seriei loco, usurpare audeat, nisi seriem esse prorsus convergentem certior factus sit. Quod si seriei termini sint divergentes, vel rursus volutatis rite quantitatibus, seriem convergentem eruere conatur, vel saltem seriem ipsam integram, atque in infinitum, prout prodiit, excurrentem, incolumi Seriei conditione, in usum vertens, quantitatem, si qua est, a qua per evolutionem gigni possit, iisdem in utroque Æquatio-

nis membro peractis operationibus, investigare contendit. Nonne tali pacto complementi ratio virtualiter habetur, serie integra adhibita suum ipsa complementum implicite involvente? Nonne operationes ipsæ in Æquatione institutæ, dum seriei Terminos afficiunt, potentialiter quoque implicita complementa affecisse, reputandæ sunt? Quis inde error promanare possit, equidem non video. Ponatur Æquatio

$$\frac{1+y}{1+y^2} = \frac{1}{5}x^{5:3} + \frac{1}{8}x^{8:3} + \frac{1}{11}x^{11:3} + \&c. \ldots\ldots\ldots (A)$$

relationem exprimens indeterminatarum x, y Problematis alicujus solvendi, propositumque sit, ut eadem relatio per Æquationem finitam, si fieri potest, definiatur.

Certum quidem est, ex superioribus, seriem (A), dum sine fine progredi censeatur, fore necessario implicite completam: & proinde, si congruo modo elici possit functio in x finita, ex cujus evolutione series hæc ipsa possit restitui, eandem fore ipsi $\frac{1+y}{1+y^2}$ æqualem. Differentietur itaque Æquatio, ut prodeat

$$\frac{dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{3}x^{2:3}dx + \frac{1}{3}x^{5:3}dx + \frac{1}{3}x^{8:3}dx + \&c. \ldots$$

hoc

hoc est

$$\frac{3dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = x^{2:3}dx + x^{5:3}dx + x^{8:3}dx + \&c.$$

Quare, facta divisione Æquationis per $x^{2:3}dx$, exurget

$$\frac{3dy(1-2y-y^2)}{x^{2:3}dx(1+y^2)^2} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c. \ldots\ldots (B)$$

Series itaque (B), ad quam pervenimus, sine fine progrediens, est ipsa quoque implicite completa. Ergo quantitas finita $\frac{1}{1-x}$, unde per evolutionem oriri seriem, notum est, tuto seriei loco subrogari potest (§. LIII.). Erit igitur manifesto

$$\frac{dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{x^{2:3}dx}{3(1-x)}$$

& integrando prodibit

$$\frac{1+y}{1+y^2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{x^{2:3}dx}{1-x}\right) + \text{Const. A}$$

Æquatio videlicet finita indeterminatarum relationem exprimens, quæ definienda proponebatur. Nullam hic procul dubio institutam esse operationem, facile apparet, quæ, serie (A) posita divergente, in errorem inducere possit. Cum enim

$\frac{1+y}{1+y^2}$, ex Problematis natura, Seriei (A) æquale esse debeat, atque y ponatur finita, Seriem tacite compleri, hoc est implicite completam haberi debere, ex præcedentibus est manifestum. Serie proinde (A), per legitimas Analyseos operationes in universam seriem institutas, in seriem (B) conversa, complementum simul in ipsam seriem (B) invectum fuisse, intelligi debet. Ergo series (B), velut implicite completa, quantitati $\frac{1}{1-x}$, unde per evolutionem oriri potest, tuto atque legitime æquata est. Hinc valor finitus rite inventus, Seriei (A) loco, subrogari potuit.

COROLL. VII.

§. LV.

Nodum ex inde Præstantiss. *Eulero* memoratum (§. XLII.) dissolvendi ratio patet apodictica. Facile enim, quemadmodum innuimus, ex eo colligi potest, Series divergentes nusquam in errorem induxisse, quod nemo in primis sit, qui, in ejusmodi seriebus tractandis, a terminis numero finitis, veluti in convergentibus fieri solet, loco seriei sumendis.

mendis consulto non caveat. Integra autem series atque sine fine progrediens suum ipsa complementum implicite trahit, ita, ut operationes, quæ Æquationem Seriem complectentes volutando instituuntur, in complementis simul virtualiter fieri, judicandum sit. Valorem proinde finitum, unde series completa per evolutionem gignitur, pro serie ipsa usurpando, & versa vice, perinde est ac si idem eidem prorsus surrogetur.

SCHOLION III.

§. LVI.

Quæ hactenus circa series a fractionibus oriundas disseruimus, ad eas modo transferri debent, quæ a Potestatum indicis fracti evolutione generantur. Etiamsi residuo, ut in fractionibus, proprie careant, *complementis* tamen nequaquam carere videbimus. Alioquin, cum suis ipsæ quoque difficultatibus afficiantur (§. XLI.), quos in illis extricare conati sumus, nodi in hujusmodi seriebus penitus inextricabiles relinquerentur.

PROP.

PROP. XXII.

§. LVII.

Si Polinomium quodlibet ſub Binomii forma $X + Y$ redigatur, atque Binomium ad Poteſtatem indicis fracti $1:\Delta$ evehatur, exiſtente Δ numero quolibet integro unitate majori, quotieſcunque fuerit X majus quam Y, ſeries, quæ inde prodit, infinita terminis conſtat continuo decreſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Binomium $X + Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ elatum præbet ſeriem

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta} + \frac{Y}{1.\Delta X^{(\Delta-1):\Delta}}$$

$$- \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^{(2\Delta-1):\Delta}} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3 X^{(3\Delta-1):\Delta}}$$

$$- \&c. \ldots\ldots\ldots$$

vel hanc

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 + \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3 X^3} - \&c. \ldots\right) \ldots\ldots (A)$$

Seriei

Seriei, a ſecundo termino incipiendo, Terminus ordinis n erit hujuſmodi

$$\frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)(3\Delta-1)\ldots\ldots\big((n-1)\Delta-1\big)z^n}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots n}$$

poſito Y : ΔX $=$ z; atque proinde terminus ordinis $n+1$, qui ſequitur

$$\frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)(3\Delta-1)\ldots\ldots\ldots(n\Delta-1)z^{n+1}}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots(n+1)}$$

Si igitur dicatur A terminus antecedens ordinis n, S ſubſequens ordinis $n+1$, erit manifeſto

$$A:S = \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)\ldots\ldots\big((n-2)\Delta-1\big)z^n}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots n} : \frac{(4-1)(2\Delta-1)\ldots\ldots(n\Delta-1)z^{n+1}}{1.2.3.4\ldots\ldots(n+1)}$$

Hinc, eliſo communi multiplicatore,

$$A : S = n+1 : (n\Delta-1)z$$

Quare ſi fuerit $n+1$ majus quam $(n\Delta-1)z$, vel, exiſtente $z = Y : \Delta X$, $(n+1)\Delta X$ majus quam $(n\Delta-1)Y$,

hoc eſt

$$\frac{X}{Y} \text{ majus quam } \frac{n\Delta-1}{(n+1)\Delta}$$

qui-

quilibet antecedens terminus Seriei proxime subsequenti erit major. Est autem X majus unitate, ex hypothesi, atque $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ perpetuo unitate minus. Ergo eo magis erit $\frac{X}{Y}$ majus quam $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$. Seriei ideo termini erunt continuo decrescentes. Q. E. D.

PROP. XXIII.

§. LVIII.

Series infinita, cujus est Terminus in genere

$$\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$$

existente n indice terminorum, Δ numero quolibet integro unitate majori, terminis constat continuo crescentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur $n+1$ loco n, ut terminus prodeat in genere ordinis $n+1$, hujusmodi

$$\frac{(n+1)\Delta - 1}{(n+2)\Delta}$$

Erit

Erit antecedens quilibet A ad proxime subsequentem S, ut

$$\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta} : \frac{(n+1)\Delta - 1}{(n+2)\Delta}$$

vel ut $\left((n^2+2n)\Delta^2 - (n+2)\Delta\right)$:

$$\left((n^2+2n+1)\Delta^2 - (n+1)\Delta\right).$$

Est autem $(n^2+2n)\Delta^2 - (n+2)\Delta < (n^2+2n+1)\Delta^2 - (n+1)\Delta$. Ergo series, cujus est terminus in Genere $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ terminis constat continuo crescentibus. Q. E. D.

COROLL.

§. LIX.

Quare minimus hujusce Seriei terminus erit, primus in ordine, cujus scilicet index $n = 1$.

PROP. XIXV.

§. LX.

Iisdem, quæ in Prop. XXII., positis, si fuerit $X : Y$ minus quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ipsi æquale, termi-

ni Seriei ab evolutione Poteſtatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ genitæ continuo augebuntur.

DEMONSTRATIO.

Etenim, ut termini creſcant, eſſe debet (§. LVII.)

$$\frac{X}{Y} \text{ minus quam } \frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$$

Quare poſito $n = 1$, ut prodeat terminus $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ Seriei, cujus eſt Terminus in genere $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, Termini quidem Seriei erunt continuo creſcentes, ſi fuerit $\frac{X}{Y}$ minus quam quantitas $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ipſi æquale, utpote quæ eſt omnium $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ minima (§. LIX.). Q. E. D.

PROP. XXV.

§. LXI.

Si fuerit X : Y intra limites conſtitutum unitatis, atque $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, minus ſcilicet unitate, majus vero

vero quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, ſeries ex evolutione Poteſtatis $(X + Y)^{1:\Delta}$ orta terminis primo conſtabit decreſcentibus: mutata poſtea lege fiet creſcens, pergetque creſcere in infinitum.

DEMONSTRATIO.

A quantitate $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, veluti termino cujuſdam ſeriei generali, evolvatur ſeries

$$\frac{\Delta - 1}{2\Delta}, \frac{2\Delta - 1}{3\Delta}, \frac{3\Delta - 1}{4\Delta}, \frac{4\Delta - 1}{5\Delta} \text{ \&c.} \ldots\ldots\ldots (A)$$

ponendo ſucceſſive loco n numeros naturales 1, 2, 3, 4 &c.. Demonſtratum jam eſt Seriei (A) terminos eſſe continuo creſcentes, quicunque ſit integer numerus Δ (§. LVIII.), atque ideo primo in ordine $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ neceſſario majores (§. LIX.). Et eſt quoque quilibet terminus unitate manifeſto minor. Ergo ſi ponatur $\frac{X}{Y}$ alicui horumce terminorum æquale, vel intra duos conſtitutum, perſpicuum eſt, fore $\frac{X}{Y}$ ſingulis antecedentibus terminis majus, ſingulis vero ſubſequentibus minus.

k 2 Prout

Prout autem est X : Y minus vel majus quam $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, termini Seriei sunt crescentes (§. LX.), vel decrescentes (§. LVII.). Ergo existente n numero terminorum initialium Seriei (A), quorum quilibet minor est quam X : Y, Seriei

$$\frac{Y}{1\Delta X} - \frac{(\Delta - 1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2} + \frac{(\Delta - 1)(2\Delta - 1)Y^3}{1.2.3.\Delta^3 X^3} - \&c.....$$

termini usque ad terminum n inclusive erunt decrescentes; deinde, existente jam $\frac{X}{Y}$ singulis subsequentibus Seriei (A) minori, pergent termini continuo crescere. Q. E. D.

COROLL.

§. LXII.

Series itaque ab evolutione quantitatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ prodeuntes, haud statim sunt divergentes, etiamsi X sit minus quam Y, quemadmodum Auctores plerique statuisse videntur, nisi simul sit X : Y minus quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$. Series insuper considerandæ sunt mixtæ, quæ partim decrescentibus, partim crescentibus terminis componuntur; id quod monuisse sufficiat.

SCHO-

SCHOLION.

§. LXIII.

Indole ſeriei ex evolutione Poteſtatis $(X+Y)^{1:A}$ derivatæ probe explorata, Quæſtiones initio recenſitæ hic quoque enodandæ obiiciuntur; quonam videlicet pacto, quave penſatione admitti debeant ſeries ex terminis in infinitum creſcentibus coaleſcentes, atque a quantitate finita reali emanatæ, dum Reſidua in fractionibus computanda locum hic proprie habere non poſſunt. Verum iiſdem, quibus in §. XLIII. & ſeq. uſi ſumus, principiis inſiſtendo, difficultates exſolvi poſſe videntur. Etenim certo certius eſt, vel ſeries continuo ad valorem $(X+Y)^{1:A}$ convergendo accedat, vel ab eo divergendo recedat, evolutione ipſa Poteſtatis in ſeriem ita ferente, Seriei terminorum compoſitione idipſum reproduci debere, a quo ſeries orta eſt. Cum autem partium numero, in quas evoluta quantitas diſtribuitur, unus potius quam alter limes legitime præſcribi non poſſit, ejus naturæ eſſe debet partium compoſitio reſolutioni contraria, ut tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, Poteſtas ipſa reſtitui queat, ſerie poſita tam decreſcente quam

te quam crescente vel mixta quoquomodo. Aliquid igitur, veluti in fractionum evolutione constituimus, addi semper debet Seriei, quæ ad verum valorem $(X+Y)^{1:\Delta}$ accedit, idque eo minus, quo magis convergit series; & contra aliquid semper detrahi, si divergat series, idque eo majus, quo magis a vero valore recedit. Hoc posito, sit series a Potestate $(X+Y)^{1:\Delta}$ derivata, hujusmodi in genere

$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + C + D + E + \&c.$$

Talis profecto esse debet partium compositio, ut sit perpetuo

$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + \rho$$
$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + \rho'$$
$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + C + \rho''$$

&c vel

$$X+Y = A^{\Delta} + \xi$$
$$X+Y = (A+B)^{\Delta} + \xi'$$

&c. & ita porro in infinitum, serie posita tam crescente quam decrescente, atque existentibus ξ, ξ' &c. Seriei complementis, prout opus, positivis vel negativis. Cum vero comparationis omogenea quælibet nil nisi $X+Y$ efficere debeant, necesse est, ut complementa id prorsus polleant, ut sit

$$X+Y = A^{\Delta} + X+Y - A^{\Delta}$$
$$X\ Y = (A+B)^{\Delta} + X+Y - (A+B)^{\Delta}$$

&c.

&c. æque ac in fractionibus superius evolutis inventum est (§. XLIII. XLIV.)

Complementa itaque in terminis numero finitis assignari actu, atque explicite posse, nemo est qui non cognoscat. Ut, si fuerit in numeris, facilitatis gratia, $X = 12$, $Y = 5$, $\Delta = 4$, & proinde Series, quæ sequitur, convergens

$$(12+5)^{1:4} = (12)^{1:4}\left(1 + \frac{5}{48} - \frac{3\cdot 5^2}{2(48)^2} + \frac{3\cdot 7\cdot 5^3}{2\cdot 3(48)^3} - \&c.\dots\right)$$

invenietur $\xi = 5$, $\xi' = -\frac{1070705}{1329964}$ &c.

Simili modo, factis $X = 4$, $Y = 9$, $\Delta = 3$, ut sit Series divergens hujusmodi

$$(4+9)^{1:3} = (4)^{1:3}\left(1 + \frac{9}{12} - \frac{2\cdot 9^2}{2\cdot 3(12)^2} + \frac{2\cdot 5\cdot 9^3}{2\cdot 3\cdot 4(12)^3} - \&c.\dots\right)$$

erunt complementa $\xi = 9$, $\xi' = -\frac{9}{4}$ &c.

& ita porro.

Verum si Series

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 + \frac{Y}{1\cdot\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1\cdot 2\,\Delta^2 X^2} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1\cdot 2\cdot 3\,\Delta^3 X^3} - \&c.\right)$$

conti-

continuari ſine fine cenſeatur, complementum, uti fit in finitis, aſſignari non poſſe, facile perſpicere eſt, eandemque fore, quemadmodum in ſeriebus e fractionibus conſtituimus, implicite completam, complemento virtualiter involuto. Series itaque ex evolutione Poteſtatum indicis fracti oriundæ, ſuis quæque complementis præditæ ſunt, atque iis quidem explicitis in terminis numero finitis, implicitis vero, ubi ſeries ſine fine progrediatur, atque pro unica, unicaque veluti complenda quantitate conſiderari debeat. Hinc, niſi in terminis numero finitis conſiſtamus, in errores, Series, quæ inde quoque proveniunt, divergentes inducere non poſſunt; integra enim ſeries in infinitum excurrens potentialiter compleri intelligitur; cumque eandem Poteſtatem reſtituere cenſeri debeat, unde orta eſt, vel loco Poteſtatis Seriem, vel Seriei loco Poteſtatem ipſam ſumere velis, tuto id fieri poſſe, incolumi æqualium notione, ex iis conſequitur, quæ ſuperius habita ſunt.

Hiſce poſitis, Theoriam Poteſtatum indicis fracti in Series evolutarum ulterius perſequamur, ut & difficultates in caſu *irreductibili Tertii gradus* §. XLI. recenſitas, ſi fieri poteſt, expediamus.

PROP.

PROP. XXVI.

§. LXIV.

Quodlibet Binomium reale formæ X + Y ad Potestatem 1 : Δ evectum, in duas series evolvi potest, eadem manente Binomii quantitate, quarum altera est decrescens, altera vero vel crescens in infinitum, vel terminis partim decrescentibus partim crescentibus composita.

DEMONSTRATIO.

Potestas $(X+Y)^{1:\Delta}$ in seriem conversa, hanc præbet Æquationem

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 + \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3 X^3} - \&c.\right)$$

.... (P)

Mutato autem membrorum Binomii ordine, ut Potestas sit $(Y+X)^{1:\Delta}$, hæc prodit Æquatio

$$(Y+X)^{1:\Delta} = Y^{1:\Delta}\left(1 + \frac{X}{1.\Delta Y} - \frac{(\Delta-1)X^2}{1.2\Delta^2Y^2} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)X^3}{1.2.3\Delta^3Y^3} - \&c.\right)$$

.... (Q)

Ponatur itaque X majus esse quam Y. Series quidem (P) terminis constat continuo decrescentibus (§. LVII.) Verum tum in Potestate $(Y+X)^{1:\Delta}$ primum Binomii membrum Y erit altero X minus. Quare vel est simul $\frac{Y}{X}$ minus quam $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$, vel majus, vel ipsi æquale. Si fuerit $\frac{Y}{X}$ minus simul quam $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$ vel ipsi æquale, Seriei (Q) termini erunt continuo crescentes (§. LVIII.). Quod si fuerit $\frac{Y}{X}$ unitate quidem minus, simul vero $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$ majus, Seriei (Q) termini ad certum usque limitem erunt decrescentes, deinde augeri pergent in infinitum (§. LIX.). Cum autem quantitas Binomii eadem maneat manifesto, patet propositum. Q. E. D.

CO-

COROLL.

§. LXV.

Id ipſum, inverſo ordine, concludi poterit, ſi Y majus quam X in evolutione Poteſtatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ conſtituatur.

Quod ſi utralibet quantitas X vel Y ponatur imaginaria, eaſdem pariter ſeries prodituras, perſpicuum eſt, alternis tamen terminis imaginarium involventes.

PROP. XXVII.

§. LXVI.

Binomium reale formæ $X-Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ elatum, exiſtente Δ numero integro impari, in duas ſeries evolvi poteſt, eadem manente Binomii quantitate, decreſcentem aliam, aliam vero vel creſcentem vel ex terminis partim decreſcentibus, partim creſcentibus conflatam.

DEMONSTRATIO.

Si Poteſtas $(X-Y)^{1:\Delta}$ in ſeriem convertatur, ut prodeat

$$(X-Y)^{1:\Delta}=X^{1:\Delta}\left(1-\frac{Y}{1.\Delta X}-\frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2X^2}-\&c.......\right)$$

Atque, permutatis Binomii membris, in ſeriem evolvatur Potentia $(-Y+X)^{1:\Delta}$, vel $-(Y-X)^{1:\Delta}$, ut ſit

$$(-Y+X)^{1:\Delta}=Y^{1:\Delta}\left(-1+\frac{X}{1.\Delta Y}+\frac{(\Delta-1)X^2}{1.2\Delta^2Y^2}+\&c...\right)$$

id ipſum demonſtrabitur, quod in Prop. præced. confectum eſt. Ergo &c.
Q. E. D.

PROP. XXVIII.

§. LXVII.

Binomium reale formæ $X-Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ evectum, poſito Δ numero integro pari,

I. Si fuerit X majus quam Y in duas ſeries evol-

evolvitur, incolumi Binomii quantitate, quarum altera terminis constat decrescentibus, altera vero vel est divergens vel mixta, imaginariis tamen utraque implicata.

II. Si fuerit vero X minus quam Y, quo quidem Potestas sit imaginaria, in duas itidem series evolvitur, quarum altera vel est divergens vel mixta, realibus utraque terminis composita, altera autem convergens est, cujus tamen termini imaginariis afficiuntur.

DEMONSTRATIO.

I. Existente enim, ex hypothesi, $X > Y$, series, quæ ex evoluta Potestate gignitur

$$(X - Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 - \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta - 1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2} - \&c.\right) \ldots (A')$$

terminis constat continuo decrescentibus (§. LVII.). At permutatis membris, series fit

$$(-Y + X)^{1:\Delta} = (-Y)^{1:\Delta}\left(1 - \frac{X}{1.\Delta Y} - \frac{(\Delta - 1)X^2}{1.2.\Delta^2 Y^2} - \&c. \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots (B')$$

quæ, prout in § LX. demonstratum est, erit divergens, si, existente $Y < X$, fuerit simul

Y

$\frac{Y}{X} < \frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ex convergente & divergente composita, si $\frac{Y}{X}$ intra limites constituatur unitatis, atque $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ (§. LXI.). Termini autem Seriei per factorem imaginarium $(-Y)^{1:\Delta}$ multiplicantur, etiamsi Potestas sit utique realis. Id ex eo proficisci, evidens est, quod Potestas $(-Y + X)^{1:\Delta}$ idem sit ac $(-1)^{1:\Delta}(Y - X)^{1:\Delta}$, & perinde fuerit ac si quantitas imaginaria $(Y - X)^{1:\Delta}$ in seriem evoluta fuisset, atque Æquatio deinde multiplicata per factorem imaginarium $(-1)^{1:\Delta}$. Ergo &c.

II. Posito autem $X < Y$, binæ Series, ex Potestatis membrorum permutatione oriundæ, sunt quæ superius (A') (B'). Verum vel est simul $\frac{X}{Y} < \frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, aut ipsi æquale, vel majus est quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$. Si fuerit vel $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ minus, aut ipsi æquale, Seriei (A') termini continuo augebuntur (§. LX.), eruntque omnes reales. At in serie (B'), existente tum $Y < X$, termini erunt decrescentes (§. LVII.), imaginario tamen singuli involuti, veluti facile videre est. Ergo &c.

Q. E. D.

COROLL. I.

§. LXVIII.

Ex Prop. ſuperioribus interim colligere licet, nullam irrationalem quantitatem finitam tum realem cum forma reali contentam, in ſeriem tantum divergentem evolvi. Perpetuo enim, permutatis membris, ſua quamque convergente ſerie, qua exprimi poteſt, præditam eſſe, demonſtratum eſt. Quod probe notandum videtur.

COROLL. II.

§. LXIX.

Id inſuper inferri poteſt (§. LXVII.), non ideo quantitates forma imaginaria comprehenſas, reales ſtatim concludendas eſſe, quod in ſeriem infinitam terminorum realium evolvi poſſint, quandoquidem radices abſolute imaginariæ ſerie aliqua vel divergente vel mixta exprimi poſſunt ex terminis omnibus realibus coaleſcente.

CO-

COROLL. III.

§. LXX.

Quod si componantur binæ Poteſtates, quarum utraque ſit realis, atque componantur itidem ſeries ex earundem evolutione prodeuntes, ſeries perpetuo quædam aſſignari poterit terminorum realium continuo decreſcentium, ſumma prædita finita, etiamſi ex variato quoquomodo membrorum Poteſtatis utriuſque ordine, incolumi quantitate, ſeries tum divergentes cum mixtæ actu evolvantur. Si autem Poteſtates componendæ imaginarias quantitates involverint, peculiari, ut ad caſum noſtrum propius accedamus, diſquiſitione perpendendæ ſunt.

PROP. XXIX.

§. LXXI.

Series infinita, cujus eſt terminus in genere

$$\frac{12n+11}{18n^2+45n+27}$$

exiſtente n indice terminorum numero quolibet inte-

integro affirmativo, terminis conſtat continuo decreſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Loco n ponatur $n+1$ in generali termino, ut terminus in genere ordinis $n+1$ prodeat hujuſmodi

$$\frac{12n+23}{18n^2+81n+90}$$

Antecedens itaque quilibet erit ad proxime ſubſequentem terminum, ut

$$\frac{12n+11}{18n^2+45n+27} : \frac{12n+23}{18n^2+81n\pm 90}$$

Eſt autem antecedens rationis manifeſto conſequente majus. Ergo ſeries terminis conſtat continuo decreſcentibus.

Q. E. D.

COROLL.

§. LXXII.

Quapropter Series, cujus foret terminus in

genere $1 - \frac{12n+11}{18n^2+45n+27}$

vel $\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}$

erit crescens; atque terminus seriei minimus erit procul dubio primus in ordine, cujus scilicet index $n=1$.

PROP. XXX.

§. LXXIII.

Hisce positis naturam serierum, quæ ex Binomio

$$\sqrt[3]{(X+Y)} + \sqrt[3]{(X-Y)},$$

in cujus membris quantitates insunt imaginariæ, evolvuntur, explorare.

RESOLUTIO.

Ex Potestate $(X+Y)^{1:3}$ hæc deducitur series

$$(X+Y)^{1:3} = X^{1:3}\left(1+\frac{Y}{1.3X}-\frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2}+\frac{2.5Y^3}{1.2.3.3^3X^3}-\&c.\right)$$

. . . . (A)

muta-

mutato vero terminorum ordine, hæc prodit Æquatio

$$(Y+X)^{1:3} = Y^{1:3}\left(1 + \frac{X}{1.3Y} - \frac{2X^2}{1.2.3^2Y^2} + \frac{2.5X^3}{1.2.3.3^3Y^3} - \&c.\right)$$

. . . . (B)

ex Poteſtate autem $(X-Y)^{1:3}$ nanciſcimur

$$(X-Y)^{1:3} = X^{1:3}\left(1 - \frac{Y}{1.3X} - \frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2} - \&c.\right) \ldots\ldots\ldots (A')$$

&, permutatis membris, hanc

$$(-Y+X)^{1:3} = Y^{1:3}\left(-1 + \frac{X}{1.3Y} + \frac{2X^2}{1.2.3^2Y^2} + \&c.\right) \ldots (B')$$

Ergo compoſitis binis (A) (A′), hæc Æquatio prodit

$$(X+Y)^{1:3} + (X-Y)^{1:3} =$$

$$2X^{1:3}\left(1 - \frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2} - \frac{2.5.8Y^4}{2.2.3.4.3^4X^4} - \frac{2.5.8\ldots.14Y^6}{1.2.3\ldots.6.3^6X^6} - \&c.\right)$$

. . . . . (C)

Et compoſitis binis (B) (B′), exurgit

$$(Y+X)^{1:3} + (-Y+X)^{1:3} =$$

$$\frac{2X}{3Y^{2:3}}\left(1 + \frac{2.5X^2}{1\ 2.3.3^2Y^2} + \frac{2.5.8.11\ X^4}{1.2.3.4.5.3^4Y^4} + \&c\ldots\right) \ldots\ldots (D)$$

m 2 Sit

Sit modo $X = \frac{q}{2}$, $Y = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$, atque $p^3 : 27$ majus quam $q^2 : 4$. Si fiat $z^2 = \frac{4}{9q^2}\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$, Æquatio (C) hanc acquirit formam

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} =$$

$$2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left(1 + \frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....14z^6}{2.3....6} - \&c.\right) \ldots\ldots (E)$$

quæ cum illa congruit, quam in §. XXI. invenimus, terminis omnibus realibus composita. Iisdem vero positis valoribus X atque Y in Æquatione (D), factoque

$$z'^2 = q^2 : 36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$$

hujusmodi prodit Æquatio

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} + \frac{q}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} + \frac{q}{2}\right)} =$$

$$\frac{q}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}}\left(1 - \frac{2.5z'^2}{2.3} + \frac{2.5....11z'^4}{2.3....5} - \frac{2.5....17z'^6}{2.3....7} + \&c.\right)$$
.... (F)

Serie itidem ex terminis realibus coalescente. Seriei (E) jam explorata est indoles in Prop. XI. XII. XIII., constitutumque est terminos tum tantum

fore

fore decrefcentes cum fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$; Exiftente autem $\frac{p^3}{27}$ majori quam $\frac{q^2}{2}$, feriem vel effe prorfus divergentem, vel in terminos definere continuo crefcentes. Series itaque (F) difcutienda modo eft. Terminus in genere Seriei, a fecundo incipiendo, invenitur hujufmodi

$$\frac{2.5.8 \ldots (6n-1) z'^{2n}}{2.3.4 \ldots (2n+1)}$$

Quare ponatur $n+1$ loco n, ut termini S prodeant Seriei proxime fubfequentes Terminos A ordinis n, quorum proinde erit Terminus in genere

$$\frac{2.5.8 \ldots (6n+5) z'^{2n+2}}{2.3.4 \ldots (2n+3)}$$

Erit itaque

$$A : S = \frac{2.5.8 \ldots (6n-1) z'^{2n}}{2.3.4 \ldots (2n+1)} : \frac{2.5.8 \ldots (6n+5) z'^{2n+2}}{2.3.4 \ldots (2n+3)}$$

Quare elifo communi multiplicatore, redactifque terminis, erit

$$A : S = (2n+2)(2n+3) : (6n+2)(6n+5) z'^2$$

Prout igitur fuerit

$(6n+2)(6n+5) z'^2$ majus vel minus quam $(2n+2)(2n+3)$

erit

erit quilibet ſubſequens terminus S ſuo proxime antecedente A major vel minor. Poſitum eſt autem

$$z^2 = q^2 : 36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$$

Ergo termini Seriei erunt creſcentes vel decreſcentes, prout fuerit

$$\frac{q^2}{36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)} \text{ majus vel minus quam } \frac{(2n+2)(2n+3)}{(6n+2)(6n+5)}$$

videlicet prout fuerit

$$\frac{p^3}{27} \text{ minus vel majus quam } \frac{(6n+2)(6n+5)q^2}{36(2n+2)(2n+3)} + \frac{q^2}{4}$$

hoc eſt quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$

eſt autem $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$ minus quam $\frac{q^2}{2}$

Si igitur fuerit 1.° $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{2}$, eo magis erit $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$. Ergo, exiſtente $\frac{p^3}{27}$ majori quam $\frac{q^2}{2}$, eſt

$$z^2 = \frac{q^2}{36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)} \text{ minus quam } \frac{(2n+2)(2n+3)}{(6n+2)(6n+5)}$$

ideo-

ideoque termini Seriei (F) ſunt decreſcentes.

II.° Si fuerit vero $\frac{p^3}{27}$ majus quidem quam $\frac{q^2}{4}$, minus vero quam $\frac{67q^2}{180}$, Series (F) terminis conſtat creſcentibus in infinitum.

Nam, ut termini creſcant, eſſe debet

$$\frac{p^3}{27} \text{ minus quam } \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right).$$ Quare, poſito $n=1$, ut minimus prodeat Seriei terminus, cujus eſt Terminus in genere (§. LXXII.)

$$\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}$$

Termini Seriei (F) erunt manifeſto creſcentes, ſi fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{67q^2}{180}$.

III.° Quod ſi $\frac{p^3}{27}$ intra limites conſtituatur $\frac{67q^2}{180}$, atque $\frac{90q^2}{180}$, ut ſit majus quam $\frac{67q^2}{180}$, minus vero quam $\frac{q^2}{2}$, Series (F) terminis primo conſtabit decreſcentibus; mutata poſtea lege fiet creſcens, pergentque termini divergere in infinitum.

Evoluto enim generali Termino

q^2

$$\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$$

ut prodeat

$$\frac{67q^2}{180},\ \frac{154q^2}{374},\ \frac{277q^2}{626}\ \&c.\ldots\ldots\ (M)$$

perſpicuum eſt quemcunque Seriei (M) terminum minorem fore $\frac{q^2}{2}$, majorem vero priori in ordine $\frac{67q^2}{180}$. Exiſtente igitur $\frac{p^3}{27}$ intra hos ipſos limites conſtituto, pronum inferre eſt, vel poſito $\frac{p^3}{27}$ alicui horumce terminorum æquali, vel intra duos quoſcunque, fore $\frac{p^3}{27}$ ſingulis antecedentibus majus, ſingulis vero ſubſequentibus minus. Uſque dum autem $\frac{p^3}{27}$ majus eſt quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$, termini Seriei decreſcere debent ex I.ª Prop. parte; contra vero creſcere, ſi fuerit $\frac{p^3}{27}$ eadem quantitate minus, veluti in II.ª Prop. parte oſtenſum eſt. Ergo, exiſtente n numero terminorum initialium Seriei (M), quorum quilibet minor eſt quam $\frac{p^3}{27}$, Seriei (F) termini uſque ad terminum ordinis

n in-

n inclusive primo decrescent, deinde crescere incipient, pergentque divergere in infinitum. Explorata est itaque natura serierum, quæ proponebantur. Q. E. F.

COROLL. I.

§. LXXIV.

Hinc primo colligimus Binomium quoque Cardanicum tam in Series divergentes, quam in convergentes evolvi, sola membrorum permutatione, Seriesque, quæ (§. XXIV-XXVI) continuo crescentes, atque valoris infinite magni prodierant, fieri modo decrescentes, eadem manente Binomii quantitate. Quæ igitur (§. LXVIII.) circa quantitates irrationales tum reales cum forma reali contentas deduximus, iis quoque conveniunt quæ, dum valore quidem præditæ sunt reali, sub forma apparent imaginaria.

COROLL. II.

§. LXXV.

Cum igitur Series ab evolutione tum fractionum cum Potestatum indicis fracti oriundæ e divergentibus convergentes evadere possint, facta tantum in evolvendis quantitatibus membrorum permutatione, incolumi valore, id inferre licet, cryteria haud admodum erutu difficilia fore, dignoscendi, si quando ad divergentes Series quæstionibus deducamur, quibus transpositis in terminis Seriei quantitatibus, ut Series fiat convergens, idem maneat Seriei valor, quicunque tandem ille sit. Etiamsi enim Seriei quoque convergentis lateret summa, terminos saltem aliquot in summam colligendos pro summa ipsa usurpare liceret. Quod quidem cum maximæ esse possit in arduis quæstionibus utilitatis, Geometris perpendi, atque excoli sane meretur.

CO-

COROLL. III.

§. LXXVII.

Præterea, cum relatio Series inter infinitas tam convergentes quam divergentes, atque quantitates a quarum evolutione Series ortæ ſunt, per Theoriam ſuperius conſtitutam, perſpecta modo ſit, & ab omni incertitudine, dubitationibuſque vindicata, ratio patet nullis obnoxia difficultatibus nodum expediendi, quem (§. XLI.) memoravimus. Cum enim Series convergentes æque ac divergentes ab evolutione Fractionum vel Poteſtatum eductæ nil niſi quantitates ipſas evolutas exprimant, Complementorum perpetuo vel explicitorum vel implicitorum habita ratione, difficultates, quæ ex incompletis compoſitionibus deducebantur, prorſus evaneſcunt.

COROLL. IV.

§. LXXVII.

Cum porro quantitates imaginarias in Series convergentes terminorum realium nequaquam converti (§. LXVII.), demonstratum sit, consideratio Serierum convergentium terminis realibus compositarum, in quas Binomium Cardanicum resolvi, compertum est, ejusdem valoris realitatem denuo comprobare potest.

SCHOLION I.

§. LXXVIII.

Quæstio igitur huc modo redit, ut investigetur utrum in Binomio Cardanico reale id quidpiam, quod per Seriem realem convergentem exprimitur, forma quoque finita imaginariis immuni involvatur. Si quis lateat reapse hujusmodi valor in Cardanica expressione, certo certius est a Serie per evolutionem ejusdem expressionis eruta, atque ab imaginariis actu liberata, repetendum esse.

Equidem hoc unum ex hac universa Theoria conclu-

concludi posse videtur, ut eadem Series nonnisi Binomium restituere debeat a quo novimus esse profectam. Verumtamen liceat in re perardua Binomii ipsius valorem quodammodo a forma distinguere sub qua apparet.

Quid enim est, cur Series Binomium utique exprimens, unde est evoluta, formæ autem imaginariæ implicatione prorsus exemta, valorem finitum, si quem involvit Binomium, imaginariorum itidem implicatione immunem, exhibere non possit? Id proculdubio contemplati sunt ii omnes, qui, postrema veluti anchora confisi, a Summatione ejusmodi Seriei *casus irreductibilis* resolutionem pendere, existimarunt. *Alembertius*, vir incomparabilis, in ea quoque videtur esse sententia, ut credat, si Series e Binomio elicita Summari possit, reale id Summa proditurum, quod Cardanica forma tegitur, atque continetur.

„ La difficultè est de Sommer cette serie; c'
„ est a quoi on n' a pu parvenir jusqu' a present.................. Il faut pour trouver l' ex-
„ pression reelle de la Racine, ou Sommer la se-
„ rie susdite, ou degager de quelqu' autre manie-
„ re l' expression trouvèe de la forme imaginaire
„ qui la defigure pour ainsi dire. C'est a quoi on
„ travaille inutilement depuis deux cents ans.

(Enciclop. Cas irreductibile)

Sum-

Summa itaque Seriei *directe* est tentanda, nulla Binomii Cardanici habita consideratione. Vel Series, prout ipsa est tum valoris cum formæ realis, summa itidem donabitur finita tum valoris cum formæ realis, vel immutatum penitus restituet Binomium Cardani. Horum quodcunque accidere ponatur, vel actu tandem definita erit quantitas realis, quæ forma illa imaginaria comprehenditur, vel *directe* tandem demonstratum erit, nullam in Cardanico Binomio intimius, a semetipso diversam, involvi quantitatem finitam forma exutam imaginaria; quo quidem quæstioni finem imponere licebit. Ad rem.

SCHOLION II.

§. LXXIX.

Quæcunque ex binis Seriebus (E) vel (F) (§. LXXIII.), quod perinde est, summanda seligatur, præmittenda sunt quædam veluti lemmata, ut signa alternatim positiva & negativa commode vitare liceat. Sumamus itaque Seriem (E), cujus directe summa sit investiganda.

PROP.

PROP. XXXI.

§. LXXX.

Seriei (E)

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8.z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.8....14z^6}{2.3.....6} + \&c......(E)$$

summam definire

eleventur Binomia $1 + 3z$, $1 - 3z$ ad Poteſtatem m. Erit

$$(1 + 3z)^m = 1 + \frac{m}{1}(3z) + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2 + \&c......$$

$$(1 - 2z)^m = 1 - \frac{m}{1}(3z) + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2 - \&c.$$

Quare Poteſtatibus Binomiorum, & ſeriebus æquivalentibus in ſummam redactis, hæc exurget Æquatio

$$\frac{(1+3z)^m + (1-3z)^m}{2} = 1 + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(3z)^4 + \&c.$$

Fiat $m = \frac{1}{3}$; Prodibit

1 —

$$1 - \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{2} = \frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4}$$

$$+ \frac{2.5.....14z^6}{2.3.4...6} + \&c....$$

Series scilicet (E'), quæ summanda proponebatur. Q. E. I.

PROP. XXXII.

§. LXXXI.

Summam determinare Seriei (E) (§. LXXXIII.) a secundo termino incipiendo

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....14z^5}{2.3.....6} - \&........(E)$$

Ponatur Y summa seriei

$$\frac{2z^3}{2} + \frac{2.5...14z^6}{2.3....6} + \frac{2.5....26z^{10}}{2.3....10} + \&c. ....(E'')$$

Atque Series (E') (§. LXXX.)

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....14z^6}{2.3....6} + \&c....... (E')$$

addatur Seriei (E)
Series prodibit manifesto

2

$$2\left(\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5...14z^6}{2.3..6} + \frac{2.5....26z^{10}}{2.3.....10} + \&c....\right)$$

duplum ſcilicet ſeriei (E''). Quare ſi a duplo ſeriei (E'') dematur ſeries (E'), erit quod ſupereſt ſumma ſeriei (E). Inventa eſt autem ſumma ſeriei (E') (§. præced.) =

$$1 - \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

Serieſque (E'') poſita eſt Y. Ergo ſumma propoſitæ ſeriei (E) æquabitur

$$2Y - 1 + \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} + \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

Q. E. I.

COROLL.

§. LXXXII.

Pendet itaque Seriei (E) valor a valore Y ſeriei (E'') ex terminis poſitivo ſigno affectis coaleſcentis.

PROP. XXXIII.

§. LXXXIII.

Hisce positis valorem Y seriei (E") investigare. Quoniam constitutum est

$$Y = \frac{2z^2}{2} + \frac{2.5..14z^6}{2.3...6} + \frac{2.5.....26z^{10}}{2.3....10} + \frac{2.5.....38z^{14}}{2.3....14} + \&c....$$

multipliciter Æquatio per $\frac{1}{3}z^{-7:3}dz$, & sumantur Integralia, ut prodeat

$$\frac{1}{3}\int(Yz^{-7:3}dz) = \frac{z^{2:3}}{2} + \frac{2.5....11z^{14:3}}{2.3....6} + \frac{2.5....23z^{26:3}}{2.3...10} + \&c..$$

Rursus multiplicetur hæc Æquatio per $z^{4:3}$, sumtisque differentialibus, dividatur per dz; Erit

$$\frac{d.z^{4:3}\int(Yz^{-7:3}dz)}{3dz} = z + \frac{2.5..11z^5}{2.3....5} + \frac{2.5....23z^9}{2.3....9} + \&c.....$$

Sumtis denuo Æquationis differentialibus, fiat divisio per dz, ut sit

$$\frac{1}{3dz}d.\left(\frac{d.z^{4:3}\int(Yz^{-7:3}dz)}{dz}\right) =$$

1 +

$$1 + \frac{2.5..11 z^4}{2.3.4} + \frac{2.5...23 z^8}{2.3...8} + \frac{2.5....35 z^{12}}{2.3....12} + \&c....$$

Multiplicetur demum Æquatio per $\frac{z^{-4:3}dz}{3}$, & sumantur Integralia. Facta deinde multiplicatione per $z^{1:3}$, prodibit

$$\frac{z^{1:3}}{9}\int\left(z^{-4:3}d.\left(\frac{d.\, z^{4:3}d.(Yz^{-7:3}dz)}{dz}\right)\right) =$$

$$\frac{z^{1:3}}{3^3}\int\left(z^{-4:3}d.(4z^{1:3}\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-1})\right) =$$

$$-1 + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....20z^8}{2.3....8} + \frac{2.5...32z^{12}}{2.3...12} + \&c.....(E''')$$

Perspicuum est autem binas series (E'''), (E'') simul sumtas æquari seriei (E'), demta unitate; Cumque seriei (E') definitus sit valor (§. LXXXI.), ponatur is = Z. Erit manifesto Æquatio

$$\frac{z^{1:3}}{3^3}\int\left(z^{-4:3}d.(4z^{1:3}\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-1})\right) + Y + 1 - Z = 0$$

Quare facta multiplicatione per $3^3 z^{-1:3}$, & peracta differentiatione, abit Æquatio in hanc

$$4z^{-4:3}dz\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-2}dz + 9z^{-1}dY + 3^4 z\,dY$$
$$- 3^3 Y dz - 3^3 dz - 3^4 z^{4:3} d.\, z^{-1:3} Z = 0$$

Et facta iterum multiplicatione per $z^{2:3}$, atque differentiatione, posita dz constanti, prodibit Æquatio differentio — differentialis in ordinem redacta hæc.

$$(1+9z^2)ddY+12zdYdz-2Ydz^2-2dz^2$$
$$-9z^{1:3}\int z^2\int z^{-1:3}\,Z=0$$

vel hæc, suffecto valore Z,

$$(1+9z^2)ddY+12zdYdz-2Ydz^2-(1+3z)^{-5:3}$$
$$dz^2-(1-3z)^{-5:3}\,dz^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (T)$$

in qua post integrationem ponendum est

$$z=\frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}$$

(§. XXI.)

Ad integrandam formulam (T), facile invenitur Æquationi satisfacere hanc

$$Y+\frac{(1+3z)^{1:3}}{4}+\frac{(1-3z)^{1:3}}{4}=0$$

Ergo posita $Y=y-\dfrac{(1+3z)^{1:3}}{4}-\dfrac{(1-3z)^{1:3}}{4}$

in Formula (T), prodit hujusmodi Æquatio

$$(1+9z^2)\,ddy+12zdydz-2ydz^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ (B)$$

quæ, facta de more $y=e^{\int t\,dz}$, vertitur in hanc, existente e quantitate, cujus log. us hyperb. est unitas,

(1 —

$(1+9z^2)dt+(1+9z^2)t^2dz+12tzdz-2dz=0$
.... (T')

Fiat modo $t=\frac{3z+\omega}{1+9z^2}$. Æquatio (T') hanc induit formam simplicissimam

$$\frac{dz}{1+9z^2}=-\frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

hoc est, facto $z=-\frac{u}{3}$, hanc

$$\frac{du}{1+u^2}=\frac{3d\omega}{1+\omega^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (T'')$$

cujus est integrale completum

$$(1-Au)(3\omega-\omega^3)-(A+u)(1-3\omega^2)=0$$

existente A constanti arbitraria; sive hujusmodi, substituto in z valore u,

$$(1+3Az)(3\omega-\omega^3)-(A-3z)(1-3\omega^2)=0\ \ldots\ldots\ (V)$$

Sit jam Z valor ipsius ω in z, & constantes ex relationis Æquatione (V) definiendus.

erit $t=\frac{3z+Z}{1+9z^2}$; atque $y=e^{\int\left(\frac{3zdz+Zdz}{1+9z^2}\right)+B}$

ideoque

$$Y=e^{\int\left(\frac{3zdz+Zdz}{1+9z^2}\right)+B}-\frac{(1+3z)^{1:3}}{4}-\frac{(1-3z)^{1:3}}{4}$$

Quod integrale erit completum Æquationis (T)

existentibus A, in ipsa expressione Z contenta, atque B constantibus arbitrariis. Inventus proinde est valor Y Seriei (E) quemadmodum proponebatur.

Q. E. I.

COROLL.

§. LXXXIV.

Cum autem sit Seriei

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.8\ldots\ldots14z^8}{2.3.4\ldots\ldots6} - \&c.\ldots\ldots (E)$$

valor (§. LXXXI.)

$$2Y = 1 + \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} + \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

erit profecto, substituto valore Y, summa quaesita

$$\frac{\int\left(\frac{3z\,dz + Z'dz}{1+9z^2}\right) + B}{2z} - 1 \ldots\ldots\ldots (\mu)$$

in qua post integrationem ponatur $z = \frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$.

SCHO-

SCHOLION.

§. LXXXV.

Statim ac vel ad purum integrale Æquationis

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{3d\alpha}{1+\alpha^2} \ldots\ldots (T'')$$

attendamus, in feriei noſtræ valorem (μ) rurſus Cardanicam formam invehi debere, ex eo cognoſcere licebit, quod manifeſto agatur de invenienda tangente α Arcus ſubtripli ejus, qui tangentem habet u in circulo, cujus eſt ſemidiameter unitas. Nam, exiſtente u Arcus tangente, erit ejuſdem Arcus Coſin. $= \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}$, atque Sin. $= \frac{u}{\sqrt{(1+u^2 1)}}$ ideoque Coſin. Anguli ſubtripli

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+u^2)}}\right)^{1:3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+u^2)}}\right)^{1:3} = \varphi$$

vel, cum ſit $u = -3z$ (§. LXXXIII.),

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+9z^2)}}\right)^{1:3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+3z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+9z^2)}}\right)^{1:3}$$

eſt autem $\frac{1}{\varphi}\sqrt{(1-\varphi^2)}$ ejuſdem anguli ſubtripli Tangens.

gens. Ergo $\omega = \frac{1}{\phi}\sqrt{(1-\phi^2)}$, & proinde Z manifesto in formam incidit Cardanicam imaginariis implicitam. Quare valor realis (μ) (§. praeced.) seriei ex Binomio Cardanico eductæ, directe inventus, etiamsi series imaginariis sit penitus immunis, eadem ipsa, qua Cardanicum Binomium, imaginariorum implicatione afficietur, formamque rursus induet imaginariam. Formulam itaque (μ) ulterius evolvere, supervacaneum esse arbitror.

Cum aliquid de eadem Æquatione (T) (§. LXXXIII.) summo Geometræ *de la Grange* perscripsissem, in litteris ad me datis, pro ea qua in me est humanitate, respondit, se quoque ad Integrale completum devenisse hujus formæ

$$Y = A\left(1+3z\sqrt{-1}\right)^{1:3} + B\left(1-3z\sqrt{-1}\right)^{1:3} - \frac{(1+3z)^{1:3}}{4} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{4}$$

existentibus A & B constantibus arbitrariis. Id ipsum invenit Cl. de *Malfatti* Analysta acutissimus, cui formulæ differentialis pariter copiam feceram, atque integrale Æquationis (B) (§. LXXXIII.) exhibuit imaginariis itidem involutum.

CO-

COROLL. I.

§. LXXXVI.

Hisce igitur hucusque constitutis, apodictice confectum est, Expressionem Cubicæ Æquationis, Cardanicam nuncupatam, nullam in se complecti quantitatem finitam imaginariorum implicatione immunem, & proinde tuto concludendum, Binomium Cardanicum, in casu vulgo irreductibili, *valoris esse necessario realis*, *formæ autem necessario imaginariæ*.

SCHOLION I.

§. LXXXVII.

Frustra itaque methodum investigari, qua, casu Æquationis tertii gradus vere irreductibili (§. I. II.), radix realis ab imaginariorum præsentia liberata algebraice exhiberi possit, pronum colligere est, id rei natura nequaquam ferente. Quid inde vero detrimenti Analyseos tum præstantiæ cum perfectioni derivetur, me certe latet, quasi radix minus algebraica, atque in Transcendentium censu haberi debeat, veluti quibusdam visum est,

quæ

quæ imaginariis quantitatibus implicatur, incolumi penitus radicis realitate.

SCHOLION II.

§. LXXXVIII.

Propterea longe abest, ut inter Cubicas reputanda sit Æquatio, quam Clariss. *Nicole* primum resolvit, exhibuitque in Actis Ac. Scient. Parif. ad an. 1738, 1740, videlicet

$$x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{2p:3} = 0$$

perinde ac si a casu irreductibili erepta foret (Enciclop. Cas. irreductible). Pari enim jure tum hæc infinities generalior

$$x^3 - px \pm \frac{p}{n}\left(\frac{n \mp 1}{n}\, p\right)^{1:2} = 0$$

cum aliæ bene multæ, quas resolvimus, atque haud ita pridem Illustriss. Societati Scient. Bononiensi obtulimus, ab irreductibilitatis casu veluti exemptæ considerari deberent. Etiamsi Æquationes tertii gradus resolubiles tum Præcl. *Nicole*, cum nobis inventæ radicibus revera præditæ sint realibus, inæqualibus, atque incommensurabilibus, attamen

tamen ad cubicas æquationes nequaquam pertinere, ex eo conjici potest, quod neque p & q sint rationales (§. I.), neque divisore careant irrationali (§. II.).

In hoc ferme numero æquationes omnes tertii gradus

$$x^3 - px + q = 0$$

in quibus $p^3 : 27$ est ad $q^2 : 4$ in duplicata ratione sinus totius ad Co-sinum Anguli $\frac{K. 360^\circ}{2^n}$, sive $\frac{K. 360^\circ}{2^n . 5}$, habendæ sunt, quarum radices reales algebraice exprimi posse, demonstravit Vir summus *Alembertius* (Vid. Com. Acad. Sc. Berolin. ad An. 1746.): Vel æquationes in genere, quæ ab Arcuum circularium trisectionibus diversimode per geometricas constructiones derivari queunt, resolubiles quidem, & radicibus tum realibus cum inæqualibus, atque incommensurabilibus donatæ, in casuum tamen vere irreductibilium censu nequaquam enumerandæ.

SCHO-

SCHOLION III.

§. LXXXIX.

Si quid novæ lucis in penitioribus tam Cubicarum æquationum, quam Serierum infinitarum mysteriis, nostra hæc attulisse cognoverint Sapientiores, Operæ id nobis erit pretium, atque ornamentum.

FINIS.

